昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2012年12月1日発行　第50巻12号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

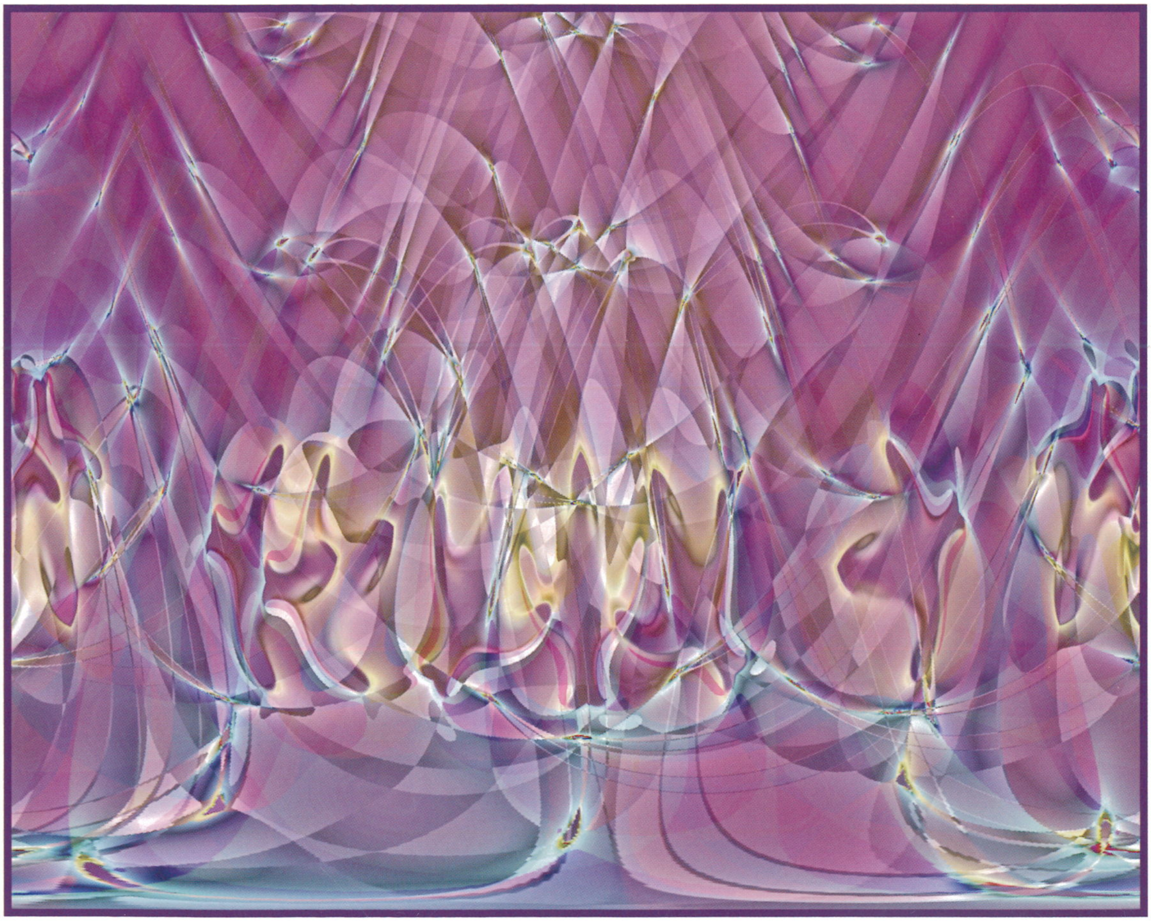
数理科学

12
2012

特集

〈振動する〉物理
周期的運動で自然の姿を捉える

振動とは何か　出口　哲生
バネと振り子の振動　力学　鈴木　康夫
振動と波動　ソリトン　松野　好雅
熱伝導と統計力学　異常輸送と拡散　齊藤　圭司
生命システムの振動現象とミクロ・マクロリンク　郡　宏
1次元量子系と振動　工藤　和恵
ソリトンの共鳴　戸田　晃一
振動と場の量子論　風間　洋一
運動する弦と振動　弦理論　伊藤　克司
［コラム］戸田盛和　日本の振動論のパイオニア　渡辺　慎介
《連載》科学と社会　その9　岡本　拓司
大学院入試問題からみた大学の数学　その3　海老原　円／太田　雅人



No.594
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 594 December 2012

〈振動する〉物理

周期的運動で自然の姿を捉える

《特 集》

振動とは何か 5 出口 哲生

バネと振り子の振動 力学 7 鈴木 康夫

振動と波動 ソリトン 15 松野 好雅

熱伝導と統計力学 異常輸送と拡散 22 齊藤 圭司

生命システムの振動現象とミクロ・マクロリンク 30 郡 宏

1次元量子系と振動 37 工藤 和恵

ソリトンの共鳴 43 戸田 晃一

振動と場の量子論 49 風間 洋一

運動する弦と振動 弦理論 54 伊藤 克司

［コラム］戸田盛和 日本の振動論のパイオニア 28 渡辺 慎介

《書 評》

白水徹也著 アインシュタイン方程式 一般相対性理論のよりよい理解のために 62 石橋 明浩

吉田武著 素数夜曲 女王陛下のLISP 63 木田 雅成

林青司著 CP対称性の破れ 小林・益川模型から深める素粒子物理 64 諸井 健夫

髙橋篤史著 弦理論の代数的基礎 環・加群・圏から位相的弦理論，ミラー対称性へ 65 梶浦 宏成

《「数理科学」は語る》

1982年12月号 66 登坂 宣好

《連 載》

科学と社会⑨ 木村駿吉の経験(4) 無線電信機の開発とその後 68 岡本 拓司

大学院入試問題からみた大学の数学③ 線形代数2 行列の基本変形をめぐって 76 海老原 円 太田 雅人

数理科学（11月号）前号案内／84
数理科学（1月号）次号予告／84
数理科学バックナンバー一覧／ 4

表紙：戸川 隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間（本誌のみ）11,000円，半年間（本誌のみ）5,500円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2009年/11 省略
2009年/12《原理》の探求
2010年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説
2012年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ［物理編］
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想［物理編］
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解

数理科学臨時別冊一覧

11年/11 リーマン予想の数理物理
11年/12 量子多体系の物理
12年/1 現象から方程式を創り出す
12年/3 演習形式で学ぶリー群・リー環
12年/4 弦理論の代数的基礎
12年/5 アインシュタイン方程式
12年/6 CP対称性の破れ
12年/7 弦の場の理論
12年/9 超弦理論の応用
12年/10 複素多様体論講義
12年/11 幾何学の量子化

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
丸善多摩センター店
ジュンク堂書店吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂書店（盛岡）
丸善津田沼店
ジュンク堂書店（新潟）
ジュンク堂甲府岡島店
ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂京都BAL店
ジュンク堂書店三宮店
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂書店旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
ジュンク堂書店（秋田）
ジュンク堂書店郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北1店）
九州大学（理系）

December 2012 MATHEMATICAL SCIENCES Number 594

特集／〈振動する〉物理

振動とは何か

出口 哲生

振動は物理学において最も重要な概念の一つであろう．そして，最も役に立つものの一つでもある．振動は定常的な運動状態を継続させる，最も基本的な方法である．例えば，振動する振り子自体の速度や位置は時間とともに変化するが，振動全体としては同じ運動を周期的に繰り返していく．

振動を等速直線運動と比較してみよう．等速運動は単純な運動ではあるが，しかし，同じ速度で移動し続けるためには無限に広い空間が必要となる．地上で無限に広い空間は現実には存在しない．振動を長時間にわたって継続するには，一周期分の運動に必要な空間領域があれば十分である．そうすれば，周期運動を繰り返していくことができる．

伝記によれば，ガリレオは教会の天井から吊り下げられたランプが振れる様子を観察して，振り子の周期が振幅によらず一定でひもの長さで決まること，すなわち振り子の等時性を発見したと言う．ガリレオは慣性の法則の発見でも有名であるが，しかし，振り子の運動という定常的な繰り返し運動の中に物理法則を見出したことも画期的である．この発見によりその後の物理学の発展の方向性が定まった，と見ることもできるかもしれない．

まとめると，自律的な運動を行う孤立した力学系において，振動は限られた空間領域内で定常的な運動を継続させる有効な運動形態の一つである．回転も定常的な運動であるが，振動の一種と考えられる（「バネと振り子の振動—力学」参照）．

複数の振動子を組み合わせると，例えば二重振り子のように複雑な運動を実現できる．複数個の質点が振動する場合，それぞれの振動の位相は，時間とともに一致したりずれたりするであろう．さらに，格子振動など多数の振動子がつながった物理系を考えると，各々の振動子の位相のずれが連続的に移動する様子が観察される．ここから，波動の見方が導かれるとも言える．なわ跳びのひもなど連続的な物質の波動は，格子間隔をゼロにする連続体近似により理解できる．流体など連続的な媒質中を伝わる波動も同様に導くことができる（「振動と波動—ソリトン」参照）．

振動や波動の振幅が大きくなると，重ね合わせの原理は成立しなくなる．重ね合わせが成立しない物理系のことを非線形系とよぶ．非線形波動の例としては津波などが挙げられる．非線形系の研究において，孤立した局在波であるソリトンはその振舞いを厳密に調べることができるため，重要な役割を果たす（「ソリトンの共鳴」参照）．ソリトンに関しては，戸田格子や広田の方法そして佐藤理論など，日本の研究者による顕著な業績が多い．そして，浅水波のモデル方程式を舞台にして，現在でもピーコン解など新しい発見が導かれている（「振動と波動—ソリトン」参照）．

熱伝導は身近な現象である．ミクロに見れば熱の正体は粒子の微小振動であり，熱伝導は格子振動系を用いて研究されてきた．熱伝導体の一端が高温で他端が低温のとき，通常の物質では，高温から低温まで一定の温度勾配が生じる．しかしこ

の経験則を理論的に説明することは，最近まで困難な問題として残されていた（「熱伝導と統計力学―異常輸送と拡散」参照）．

振動子が相互作用するとき，振動が次第に揃う共振など，興味深い現象を示す．生命システムは非平衡開放系であり，生命現象における振動の典型例として，心拍や体内時計といった生物リズムが挙げられる．リミットサイクルの一例として，概日リズムの模型が議論されている（「生命システムの振動現象とミクロ・マクロリンク」参照）．

振動子に周期的に振動する外場を加えると共鳴現象が生じる．一方，量子系に振動外場を作用させると，どのような応答を示すであろうか．量子系の時間発展が数値シミュレーション等により調べられている（「1 次元量子系と振動」参照）．

このように振動は力学の重要な構成要素であるが，それだけでなく，自然界に存在する様々な現象，森羅万象を記述する重要な道具でもある．量子力学では，根本的にはすべての物質は波動である，という見方がド・ブロイにより示された．実際，量子状態を記述する基礎方程式のシュレーディンガー方程式は波動を記述する方程式の一つである．

古典電磁気学では，真空中を伝播する電磁波を予言するマクスウェルの理論がヘルツの実験によって 19 世紀末に検証された．素粒子物理の基礎である量子場の理論では，この見方をさらに進める．真空に場の自由度が存在し，場が振動して波動が生じ，波動場のエネルギー量子が粒子として観測される（「振動と場の量子論」参照）．

場の量子論を物質へ応用すると，物質の構成要素の間には相互作用があり，励起状態は粒子的な振舞いを示す．これを素励起とよぶ．標準理論の素粒子も，もしかすると未知の真の理論から見れば，素励起として理解できるのかもしれない．真の理論の候補である超弦理論は，極微のスケールにおける弦の振動の解析を出発点としている（「運動する弦と振動―弦理論」参照）．

非平衡系の統計力学においても振動や波動の見方は役に立つ．冷却原子系でのボース・アインシュタイン凝縮の実験等に刺激され，量子系の平衡状態への緩和過程がシミュレーションなどで調べられた[1)]．さらに，最近再発見されたフォン・ノイマンの量子力学的エルゴード定理等によれば[2~4)]，孤立した量子系の時間発展では，ほとんどすべての初期状態から出発して最終的には平衡状態へ緩和することが示された．これを直感的に説明する．まず，振動数の異なる多数の固有状態を重ね合わせて純粋状態をつくる．すると，振動数が異なる多数の振動では，長時間が経過すると位相がずれて振動を互いに打ち消し合うようになる．このためほとんどの時刻でこの純粋状態は平衡状態と同じ対角成分のみの密度行列を与える．

従来，非平衡系が時間発展で緩和する現象は，外界に熱浴系を仮定してそれとの接触によって緩和現象が説明されてきた．ブラウン運動という，微粒子のジグザグとした軌跡をもつ運動が生じる原因は，アインシュタインによって，溶液中の分子のミクロな衝突がランダムに起こるためと説明された．しかし，フォン・ノイマンのように，異なる振動数の振動の重ね合わせで生じる打ち消し合いのために緩和が起きる，と言う見方も可能である．これは，緩和現象に対する一つの独立な見方である．実際，可積分量子多体系を用いて，孤立量子系の緩和現象が具体的に調べられた[5)]．

以上のように，振動は力学の初歩で習う考え方であるにも関わらず，現在でも新しく重要な応用が見出されている．振動の物理的意義の深さはそう簡単には汲みつくせそうにない．読者が本特集を読んで，振動の様々な新しい切り口に出会うことができれば，望外の喜びである．

参考文献

1) M. Rigol, V. Dunjko, V. Yurovsky and M. Olshanii, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 050405 (2007).
2) P. Reimann, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 160404 (2007).
3) R. Tumulka, *Eur. Phys. J. H* **35**, 201 (2010) [J. von Neumann, *Z. Phys.* **57**, 30 (1929)].
4) S. Goldstein, J.L. Lebowitz, C. Mastrodonato, R. Tumulka and N. Zhanghi, *Proc. Roy. Soc. A* **466**, 3203 (2010).
5) J. Sato, R. Kanamoto, E. Kaminishi, and T. Deguchi, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 110401 (2012).

（でぐち・てつお，お茶の水女子大学理学部）

バネと振り子の振動
力学



鈴木　康夫

1. バネの振動

かつて力学の教科書[1,2]では，惑星の運動が学習の主役に据えられていました．最近の教科書[3,4]では，様々な周期運動が中心になっています．もちろんその中には惑星の運動も含まれますが，どちらかというと単振動の周辺に多く頁を割いています．科学的には，惑星の運動のほうが知的好奇心を刺激するでしょうが，工学的には，単振動のほうが応用範囲が広く重要でしょう．

物体の運動を扱う古典力学の根幹は**ニュートンの運動方程式**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - F = 0 \tag{1}$$

という宇宙の基本法則です．ここで m は物体の質量であり，F は物体に働く力です．物理学では物体の運動とは独立に，力という物理量が存在すると考えます．バネ定数が a のバネによる振動運動では，この F の部分に**フックの法則**

$$F = -ax \tag{2}$$

に従う力が入ります．このときに物体に起こる周期運動を**単振動**（もしくは調和振動）といいます．

フックの法則は運動方程式と違って，宇宙の基本法則とは言いにくいものです[5]．一般に，力は物体の位置や速度に依存しますが，フックの法則はそのうち位置に比例する項だけからなっています．速度によらない力について，位置に関して展開して最低次の項をとったものと理解できます．実際にこの近似は多くの場合に実用上十分であり，とくに金属や高分子の場合，変形に対する応力として広い範囲で成り立ちます．また，高次の項や速度に比例する項が重要になる場合について研究する基盤としても単振動の学習は重要です．

運動方程式 (1) にフックの力を入れると，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + ax = 0 \tag{3}$$

となります．微分の次数（階数）の一番高い項の係数を 1 にするために，$\omega = \sqrt{\frac{a}{m}}$ と置いて全体を m で割ると方程式 (3) は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{4}$$

となります．この時間 t に関する 2 階の常微分方程式 (4) の**一般解**は

$$x = A\cos(\omega t + \beta) \tag{5}$$

という三角関数で表される周期関数です．三角関数の微分公式と合成関数の微分法により，これが方程式 (4) の解であることは微分して確かめられます．振幅 A と位相 β は，どんな値でも方程式 (4) を満たします．2 階の常微分方程式の一般解には 2 つの任意定数が現れ，これらの値は運動の初期条件で決まります．この**単振動の周期**は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{a}} \tag{6}$$

となることは，この解からもわかりますし，周期を決めている物理量が，物体の質量 m，バネ定数

a，振幅 A であるとし，**次元解析**することによってもわかります．ω は振幅などの初期条件によらず，系が固有にもつ性質だけで決まっているので，**固有振動数**と言われます．

次に単振動のエネルギーについて考えてみましょう．フックの力は**保存力**であり，**ポテンシャルエネルギー**で表せます．一般に，ポテンシャルエネルギーと力の関係は

$$F = -\frac{dU}{dx} \tag{7}$$

ですので，フックの法則に従う力は

$$U(x) = \frac{1}{2}ax^2 \tag{8}$$

というポテンシャルエネルギーから導かれます．

保存力の下での運動では運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを合わせた力学的エネルギーが保存されます．**単振動の力学的エネルギー**は

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) \tag{9}$$

となり，これが周期運動の間，保存されます．E は定数になりますから，この式は 1 階の常微分方程式と考えられます．次のように変形して，

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\{E - U(x)\}, \tag{10}$$

変数分離のテクニックを用いると，形式的に

$$\sqrt{\frac{2}{m}}\int^t dt = \int^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \tag{11}$$

と積分の形で x と t の関係，すなわち運動方程式の解が求まります．例えば，単振動の場合は $U = \frac{1}{2}ax^2$ をあてはめ，定数 E を $\frac{1}{2}aA^2$ と書き，積分 (11) を実行すると，

$$\sqrt{\frac{2}{m}}t + \text{const.} = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin^{-1} Ax \tag{12}$$

となり，ここに現れる積分定数 const. を $\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)$ と書けば，単振動の解 (5) になります．

2. 惑星の運動

単振動の応用として，**万有引力**による惑星の運動について考えてみましょう．太陽を原点としたときの惑星の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると，惑星は

$$F = G\frac{mM}{r^2} \tag{13}$$

という原点（太陽）からの距離の逆自乗に比例する万有引力を受け，惑星の運動方程式は

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + G\frac{mM}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = 0 \tag{14}$$

となります．万有引力はクーロン力とともに宇宙の基本法則の一つです．式 (13) の分母に出てくる r の指数は正確に自然数 2 に一致していて，2 からのずれは今のところ発見されていません．

万有引力やクーロン力のように，常にある一点を向くような力は**中心力**と呼ばれ保存力です．中心力を受ける運動では力学的エネルギーだけでなく，**角運動量** $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$ も運動の間，保存されます[1~4)]．角運動量はベクトルであり，向きも含めて保存されるので，物体の運動は位置ベクトルと速度ベクトルで作られる平面内に限られることになります．つまり中心力の下では 3 次元空間の運動でも物体の運動は 2 次元平面内に限られます．

そこで，位置 $\boldsymbol{r} = (x, y)$，速度 $\boldsymbol{v} = (\dot{x}, \dot{y})$，加速度 $\boldsymbol{a} = (\ddot{x}, \ddot{y})$ を **2 次元極座標表示**における変数 (r, θ)，速度 $\boldsymbol{v} = (v_r, v_\theta)$，加速度 $\boldsymbol{a} = (a_r, a_\theta)$ で表すと，運動方程式が見やすくなります．ここでは時間微分に関するニュートンの記法 $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ を採用します．デカルト座標と 2 次元極座標の変数と速度成分は，図 1 のような関係にあり，

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r}, \\ v_\theta &= r\dot{\theta}, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \\ a_\theta &= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \end{aligned} \tag{17}$$

が成り立ち，力の角度方向成分 F_θ はゼロなので，惑星の運動方程式 (14) を 2 次元極座標で表示すると

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{GM}{r^2} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \tag{19}$$

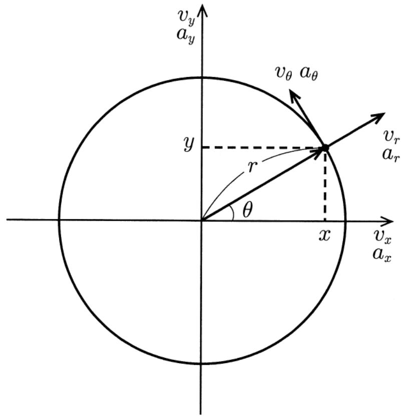


図 1 2次元極座標とデカルト座標の位置と速度．

となります．角度方向の運動方程式 (19) は角運動量保存に対応し，$h = r^2\dot{\theta}$ と置くと，動径方向の運動方程式 (18) は

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0 \tag{20}$$

と一見非線形な微分方程式になります．

時間についてのパラメータ表示 $r(t)$, $\theta(t)$ から軌道の方程式 $r(\theta)$ を求めることを先回りして，r の t に関する微分方程式 (20) を r^{-1} の θ に関する微分方程式に書き直します．まず，時間 t に関する微分方程式を角度 θ に関する微分方程式に書き直すために，

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta} = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta} \tag{21}$$

の関係を使って，微分の項を

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{h^2}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) \tag{22}$$

と書き直し，さらに $r^{-1} = u$ と変数変換すると運動方程式 (20) は次のようになります．

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{GM}{h^2} = 0. \tag{23}$$

$\frac{GM}{h^2}$ は定数ですから，この方程式は $u - \frac{GM}{h^2}$ の線形な微分方程式で振動数 1 の単振動の微分方程式です．したがって，この微分方程式の解は

$$u - \frac{GM}{h^2} = A\cos(\theta + \beta) \tag{24}$$

となります．$r = u^{-1}$ であったことを思い出し，$\beta = 0$, $l = \frac{h^2}{GM}$, $\epsilon = \frac{Ah^2}{GM}$ と置くと，

$$r(\theta) = \frac{l}{1 + \epsilon\cos\theta} \tag{25}$$

となります．ここで G は宇宙の基本定数（重力定数），M は系に固有な定数（太陽の質量）です．また，l や ϵ は，「保存量」h や「振幅」A による量ですから，運動の初期条件によって定まります．これは惑星の力学的エネルギー E と角運動量 $L = mh$ を決めることと同等です．

解 (25) から惑星の軌道が**離心率** ϵ の楕円であることがわかります．面積速度は $\frac{rv_\theta}{2} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = \frac{h}{2}$ なので，**公転周期** T は楕円の面積 $\frac{\pi l^2}{(1-\epsilon^2)^{3/2}}$ を**面積速度** $\frac{h}{2}$ で割って，楕円の**長半径** $\frac{l}{1-\epsilon}$ を c とおくと

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{c^3}{GM}} \tag{26}$$

と求まります．これが有名なケプラーの第三法則 $T^2 \propto c^3$ です．

3. 減衰振動と強制振動

3.1 減衰振動

次に物体の受ける力が位置 x だけでなく，速度 $\frac{dx}{dt}$ に関係する場合についても考察しましょう．物体の速度に比例する力は自然界では**抵抗力**

$$F = -b\frac{dx}{dt} \tag{27}$$

として現れます．工業的な応用としてはバネのダンパーとしてドアや乗り物のサスペンションに使われています．この力が重要になると運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + ax + b\frac{dx}{dt} = 0 \tag{28}$$

となります．$\omega = \sqrt{\frac{a}{m}}$, $\gamma = \frac{b}{2m}$ とおくと

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{29}$$

と変形でき，この 2 階の常微分方程式の一般解は，ω と γ の大きさで場合分けされ，次のように三角関数や指数関数で表されます．

$\omega > \gamma$ の場合は**減衰振動**と呼ばれ，

$$x = A\exp(-\gamma t)\cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\,t + \beta), \tag{30}$$

$\omega = \gamma$ の場合は**臨界減衰**と呼ばれ，

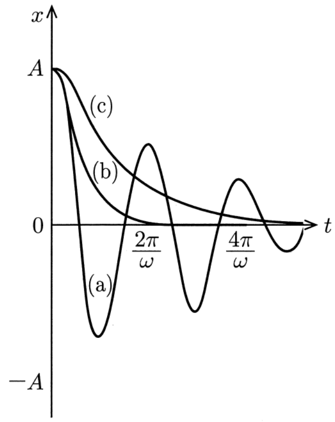


図 2　(a) 減衰振動，(b) 臨界減衰，(c) 過減衰．

$$x = (A + Bt)\exp(-\gamma t), \tag{31}$$

$\omega < \gamma$ の場合は**過減衰**と呼ばれ，

$$x = A\exp\{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t\} + B\exp\{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t\} \tag{32}$$

となります．図 2 に 3 つのパラメーター領域での減衰振動の様子を示します．扉をバネとダンパーを使ってできるだけ早くかつ静かに締めるためには臨界減衰 (31) のパラメーターを使います．

3.2 強制振動と共鳴現象

外力が周期的に変化するときにも周期運動が起こり，これを**強制振動**といいます．ここではフックの法則に従う力の他に振動数 Ω で周期的に変化する外力 $f\cos\Omega t$ が働いている系を考察しましょう．運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + ax - f\cos\Omega t = 0 \tag{33}$$

です．単振動のように x の 1 次の項のみを含む微分方程式を**線形斉次微分方程式**といいますが，強制振動のような微分方程式は x の 0 次の項である外力 $f\cos\Omega t$ の項を含みますので，**非斉次微分方程式**と呼ばれます．

微分方程式が線形斉次の場合には**解の重ね合わせ**ができます．$x_1(t), x_2(t)$ が解であれば，A, B を任意定数として $x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$ も解となります．2 階線形斉次常微分方程式では $x_1(t)$ と $x_2(t)$ が独立な解であれば，すべての解がこの線形結合の形で表され，一般解となります．

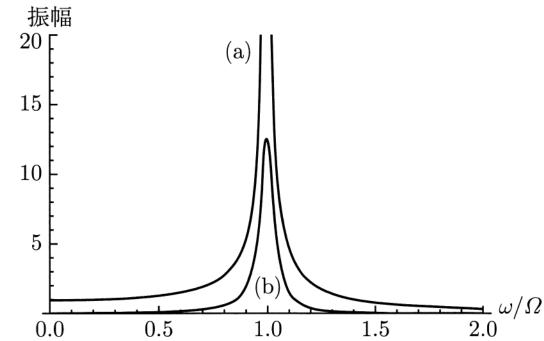


図 3　共鳴現象．(a) 抵抗力なし，(b) 抵抗力あり．

強制振動の場合は非斉次ですから，解の重ね合わせは成り立ちません．微分方程式 (33) の解として $x(t) = C\cos\Omega t$ の形を仮定して，実際に方程式に代入すると

$$C = \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \tag{34}$$

のときに方程式が満たされることがわかります．非斉次微分方程式の一般解は，この**特別解**に外力がない場合の斉次微分方程式の一般解を加えて

$$x(t) = \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)}\cos\Omega t + A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{35}$$

と表されます．式 (34) により，外力の振動数 Ω が系の固有振動数 ω に近づくと，図 3 のように振幅が発散することがわかります．実際には，多かれ少なかれ抵抗力が働くので発散はしませんが，振幅が極端に大きくなることは変わりません．これを**共鳴**（共振）現象といいます．

強制振動に抵抗力が加わった場合の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + ax + b\frac{dx}{dt} - f\cos\Omega t = 0 \tag{36}$$

となります．特別解は $C\cos\Omega t + D\sin\Omega t$ を仮定して微分方程式に代入すれば求まります．この特別解に斉次微分方程式の一般解を重ね合わせれば抵抗力のある場合の強制振動の一般解が

$$x(t) = \frac{(\omega^2 - \Omega^2)f}{m(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}\cos\Omega t + \frac{2\gamma\Omega f}{m(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}\sin\Omega t + A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{37}$$

と求まります．図3に示すように，この解は強制振動の振動数 Ω が系の固有振動数 ω に近づいても発散はしませんが，振幅が著しく大きくなり，共鳴現象の性質は変わりません．

それでは x の高次の項が重要になり，単振動の近似が不十分な場合にはどうなるでしょうか．つまりバネの力が変形 x に対して

$$F = -ax + bx^3 \tag{38}$$

となるようなときです（2次の項は変形の対称性により無視できる場合が多い）．このようなバネを**非線形バネ**といいます．この場合，解は一般には初等関数では表すことができず，**楕円関数**で表されます[6]．これについては次の振り子の運動と合わせて考察しましょう．

■　4. 振り子の振動　■

振り子とは一定の長さのひもにおもりをつけて他端を固定したものです．振り子の振動とは，ひもがたるまないようにおもりを少し持ち上げて，離したときに起こる周期運動のことです．通常は鉛直平面内の運動を想定します．振り子は一定の周期で振動する性質（**等時性**）を持ちます．この周期は次元解析からも求まりますが，運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} - m\boldsymbol{g} + S\frac{\boldsymbol{r}}{r} = 0 \tag{39}$$

の解から調べることもできます．ベクトル $\boldsymbol{r}$ は，振り子の固定された端を原点としたときの鉛直面内におけるおもりの位置 (x, y) で，$\boldsymbol{g}$ は重力加速度，S はひもの張力です．関係式 (15)〜(17) を使って，振り子の運動方程式を2次元極座標表示で表します．惑星の運動とは違って F_θ はゼロではありませんが，振り子のひもの長さ l は一定で，動径方向の距離 r は変化しないので，角度 θ が分かればおもりの位置が特定できます．$r = l$（一定）を用いると，運動方程式 (39) から角度 θ の運動方程式

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{40}$$

が導かれます．この運動方程式 (40) は，フックの

法則に従うバネの単振動と異なって，非線形な 2 階の常微分方程式です．

このような非線形な微分方程式の解は，一般には初等関数では表せませんが，振り子の振れ角が小さい場合は，単振動で近似できます．正弦関数は

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots \tag{41}$$

と展開できるので，微小角振動 $\theta \ll 1$ の場合，角度 θ の運動方程式 (40) は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{42}$$

と近似され，解はすでに見たように

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \beta) \tag{43}$$

となり，振り子の振角は単振動に近くなります．θ_0 は最大振角です．$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ですので振動の周期は

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{44}$$

となります．単振動近似したときの周期 T_0 は，次元解析からもわかりますが，無次元の因子は特定できないので，近似をしない場合の周期の単振動からのずれは次元解析からはわかりません．

振り子の運動を単振動の近似をせずに解析しましょう．非線形な微分方程式を解くことになります．おもりのポテンシャルエネルギーは

$$U(\theta) = mgl(1 - \cos\theta) \tag{45}$$

ですので，力学的エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta) \tag{46}$$

となります．最大振角 $\theta = \theta_0$ では運動エネルギーは 0 ですから，$E = mgl(1 - \cos\theta_0)$ と表せます．式 (11) と同様に，エネルギー保存則から変数分離法により積分して θ と t の間の関係を求めると

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}\omega}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \tag{47}$$

となります．$k = \sin\frac{\theta_0}{2}, \sin\frac{\theta}{2} = k\sin\phi$ とおくと

$$\omega t = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}} \tag{48}$$

と変形できます．この右辺に現れる積分は一般には初等関数では表せない関数で，**第一種楕円積分** $F(\phi, k)$[6, 7] と呼ばれています．

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}}. \tag{49}$$

$z = \sin\phi$ と変数変換すると第一種楕円積分は

$$u(z, k) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}\sqrt{1 - k^2z^2}} \tag{50}$$

とも書けます．この関数 $u(z, k)$ の逆関数は，**Jacobi の振幅関数** $z = \mathrm{am}(u, k)$[6] と呼ばれています．$\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\phi$ と置きましたが，$\sin\phi = \sin\mathrm{am}(u, k)$ という関数には **Jacobi の楕円関数** $\mathrm{sn}(u, k)$[6, 7] という名前がついています．すなわち

$$\mathrm{sn}(u, k) = \sin\phi(u, k), \tag{51}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = k\,\mathrm{sn}(\omega t, k). \tag{52}$$

ですから，振り子の運動の解析的で厳密な解は，Jacobi の楕円関数を使って

$$\theta(t) = 2\sin^{-1}\{k\,\mathrm{sn}(\omega t, k)\} \tag{53}$$

と書けます．θ が 0 から θ_0 まで振れるときに，ϕ は 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで変化するので，振り子の周期は

$$T = \frac{4}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}} \tag{54}$$

と表されます．

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}} \tag{55}$$

という積分には**第一種完全楕円積分**[6, 7] という名前がついています．Jacobi の楕円関数 $\mathrm{sn}(u, k)$ の（一つの）周期は $4K$ です．非積分関数を $k = \sin\frac{\theta_0}{2}$ について展開して積分を実行すると，

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \cdots\right) \tag{56}$$

となり[6, 7]，最初の項が単振動の周期 T_0 を与え，次の項が，振幅 θ_0 が大きくなったときの単振動からのずれを示します．つまり周期が振幅によるという意味で，振り子の非等時性が崩れます．そのずれは無次元の量なので，次元解析からは求められません．

式 (38) の力をもつ非線形バネも運動方程式の解はやはり楕円関数で表されます[6]．

5. フーコーの振り子

フーコーの振り子とは，振り子の支点に工夫を凝らして，振り子の振動面が水平方向に自由に回転できるようにしたものです．地球の自転に応じて振り子の振動面が回転することが実験によって確かめられます．これは地球の回転によって生じるみかけの力である**コリオリの力**が働くせいです．フーコーがこの振り子を作った当時，この現象は地球が自転していることの決定的な証拠となりました．この振動面の回転周期は，振り子が置かれた地上の緯度に依存します．緯度 α とすると，この振動面の回転周期は $\sin\alpha$ に反比例します．当時，この証明は難問でした．これを証明しましょう．

振り子の糸の長さを l，糸の張力を S とします．おもりは支点を中心とした球面上を運動しますが，振動面の回転を記述するには，運動の水平面（xy 平面）への射影を扱えば十分です．射影は xy 平面内でほぼ単振動を行います．そしてその単振動の向きが xy 平面上をゆっくりと変わっていきます．そこで，振り子が設置された北半球の地点に固定された座標系として，図 4 のように，水平面上東に向かって x 軸を，北に向かって y 軸を，鉛直上方に z 軸をとり，おもりの最下点を原点とする座標系 O でフーコーの振り子を記述します．

座標系 O でおもりの位置が (x, y, z) にあるとき，おもりに働く力は，糸の張力と重力からなりますが，糸の張力を水平面に射影した xy 成分は

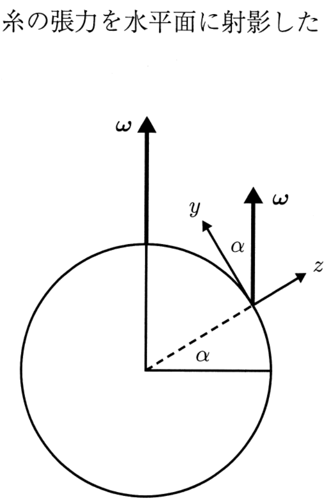


図 4 フーコー振り子を記述する座標系．

$$F_x = -S\frac{x}{l},\ F_y = -S\frac{y}{l} \tag{57}$$

と近似できます．一方，糸の張力の鉛直成分（z 成分）は，重力と「地球の回転による遠心力」（座標系 O が地球の軸を中心として回転することによって働く慣性力）との合力，につりあっています．

図 4 に示すように，地球上の緯度 α にある（自転軸からの角度が $\frac{\pi}{2}-\alpha$ となる）場所でフーコーの振り子の振動を観測する場合を考えます．地球の自転の**角速度ベクトル**を $\boldsymbol{\omega}$ とすると，この地点に固定された上記の座標系 O も，慣性座標系に対して角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ で回転しています．座標系 O を使って $\boldsymbol{\omega}$ を成分表示すると

$$\boldsymbol{\omega} = (0, \omega\cos\alpha, \omega\sin\alpha) \tag{58}$$

となります．フーコーの振り子のおもりはほぼ xy 平面内で運動していて $\frac{dz}{dt} \approx 0$ と近似できます．おもりに働く力として，糸の張力の xy 成分に加えて，地球の自転によるコリオリの力 $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$ を考慮すると，座標系 O でのおもりの運動方程式は，

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -S\frac{x}{l} + 2m\omega\sin\alpha\frac{dy}{dt}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -S\frac{y}{l} - 2m\omega\sin\alpha\frac{dx}{dt} \end{aligned} \tag{59}$$

となります．ここから張力 S を消去すると

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = -\omega\sin\alpha\frac{d}{dt}\left(x^2+y^2\right) \tag{60}$$

となります．$t=0$ でおもりの位置は座標系 O の原点にあったとして，これを t について積分すると，

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = -\omega\sin\alpha\left(x^2+y^2\right) \tag{61}$$

という関係式が得られます．これを xy 平面内で原点を共有する 2 次元の極座標 (r, θ) に座標変換して表すと，

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega\sin\alpha \tag{62}$$

が導かれます．積分すると $\theta(t) = -\omega t\sin\alpha + \theta_0$ となり，これは振り子の振動面の方位角 θ の時間変化を与えます．したがって，北半球で緯度 α の

地点においてフーコーの振り子を観測すると，振り子の振動面は鉛直上方から見て時計回りに24時間$/\sin\alpha$ の周期で回転して行くことがわかります．

6. 単振動の解析力学

最後に単振動についての**解析力学**を簡単にまとめてみましょう．解析力学の基本になる**ラグランジアン**は，運動エネルギーからポテンシャルエネルギーを引いた量を位置 $x(t)$ の関数として表したもので，単振動については

$$L(\dot{x}, x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}ax^2 \tag{63}$$

となります．運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{64}$$

の関係から導かれますので，確かめてみてください．**ハミルトニアン**は力学的エネルギーを運動量 p と位置 x の関数として表したもので，

$$H(p, x) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}ax^2 \tag{65}$$

となります．運動方程式は

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \ \ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{66}$$

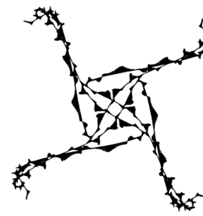
の関係から導かれます．

参考文献

1) 山内　恭彦：『一般力学』（増訂第 3 版），岩波書店 (2002).
2) エリ・デ・ランダウ，イェ・エム・リフシッツ：ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程『力学』（増訂第 3 版），東京図書 (1974).
3) 原　康夫：『第 3 版　基礎物理学』，学術図書出版 (2006).
4) 十河　清，和達　三樹，出口　哲生：『ゼロからの力学 I・II』，岩波書店 (2005).
5) 鹿児島　誠一：『自然現象と物理法則のあいだ』，丸善 (2011).
6) 戸田　盛和：『楕円関数入門』，日本評論社 (1976).
7) 新田　英雄：『物理と特殊関数—入門セミナー』，共立出版 (1997).

（すずき・やすお，拓殖大学工学部）

振動と波動
ソリトン



松野　好雅

1. はじめに

振動や波動は我々の身のまわりの至るところで観察されるなじみの深い自然現象である．振り子の運動，ギターやバイオリンの弦の振動，地震による建物の揺れ等は前者の代表例であり，音波や津波は後者の例である．振幅が小さい場合（以下では線形波と呼ぶ），これらの現象の数理的取扱いは容易である．実際，両者は線形の常（あるいは偏）微分方程式で記述され，その解として三角関数が現れる．線形方程式の解の特徴の一つが**重ね合わせの原理**である．すなわち，方程式に解がいくつかある場合，それらの和も元の方程式の解となる．

一方，振動や波動の振幅が大きい場合（以下では非線形波と呼ぶ）この性質は成り立たない．最近観測された非線形波の実例では，昨年3月の東日本大震災により発生した大津波が記憶に新しい．流体物理学に代表されるように，非線形現象の研究の歴史は古いが，その非線形性ゆえに厳密な解析には極めて大きな困難を伴う．物理学や工学では基礎方程式系から現象の本質的な部分を抽出するようなモデル方程式系を構築する研究が行われてきた．しかしながら，方程式が非線形である場合，厳密解を求めることは一般には不可能に近い．この状況が劇的に変わったのは浅い水の波のモデル方程式である Korteweg–de Vries（KdV）方程式の厳密解法の発見である[1]．これは逆散乱法と呼ばれており，非線形波動方程式の強力な解析手法の一つとなっている．この KdV 方程式の特殊解が**ソリトン**（soliton）である．

本稿では KdV 方程式に代表されるような，厳密に解ける振動や波動の方程式の解からソリトンという普遍的な概念が生まれたことを見ていく．第2節では非線形格子振動モデルの代表例である戸田方程式，およびソリトン解について簡単に述べる．第3節では戸田方程式の連続体近似から KdV 方程式が得られることを示す．第4節では KdV 方程式の性質について述べる．特に，波の分散性と非線形性が波の時間発展に及ぼす影響について考える．さらに，両者のつり合いによりソリトンが形成されることを観察する．第5節では水の波のモデル方程式の一つである Camassa–Holm 方程式について最近の話題を紹介する．

2. 非線形振動

非線形振動の例として x 軸上に平均間隔 h で並んだ質量 m の単原子の1次元格子振動を考える．n 番目の原子の平衡位置からの変位を y_n，相対変位を $r_n = y_n - y_{n-1}$ とする．簡単のため各原子は最隣接の原子からのみ力を受けると仮定する．ポテンシャルエネルギーを $\phi = \phi(r)$ とすると，変位 $y_n = y_n(t)$ に対する運動方程式は

$$m\frac{d^2 y_n}{dt^2} = -\phi'(r_n) + \phi'(r_{n+1}) \tag{1}$$

と書ける．調和ポテンシャル $\phi=\frac{1}{2}\kappa r^2$ (κ: 正の定数) の場合，(1) は Hooke の法則に従うバネで結合された線形格子振動のモデルであり，厳密に解けることはよく知られている．しかしながら，ポテンシャルエネルギーが $\phi=\frac{1}{2}\kappa r^2+\frac{1}{3}\kappa\alpha r^3$ (α: 定数) のように r に関して 3 次の項を含むと，方程式は非線形となり厳密解を求めることは極めて困難となる．実際，非線形結合係数 α が小さい場合は，摂動論による近似計算を行うか，それ以外の場合は，数値計算に頼らざるを得ない．それでは厳密に解ける非線形相互作用の例は存在しないのであろうか．戸田は逆散乱法が発見された年と同じ 1967 年に厳密解を有する非線形格子振動のモデルを提案した[2,3]．そこで導入されたポテンシャルは現在戸田ポテンシャルと呼ばれている．具体的に書くと

$$\phi(r)=\frac{a}{b}e^{-br}+ar. \tag{2}$$

ここで，a, b は条件 $ab>0$ を満たす定数である．(2) を (1) へ代入すると，y_n に対する運動方程式は

$$m\frac{d^2y_n}{dt^2}=a\left\{e^{-b(y_n-y_{n-1})}-e^{-b(y_{n+1}-y_n)}\right\} \tag{3}$$

となる．また，相対変位 r_n に対しては

$$m\frac{d^2r_n}{dt^2}=a(2e^{-br_n}-e^{-br_{n-1}}-e^{-br_{n+1}}) \tag{4}$$

のように表せる．方程式 (3)，あるいは (4) を発見者にちなんで戸田方程式と呼ぶ．これらは特別な場合として線形格子の方程式を含む．このことは，$ab=\kappa$（＝一定）の条件の下で極限，$b\to 0$ をとってみれば確かめられる．戸田方程式は非線形方程式であるため，一見して解けそうに思えないが，巧妙な従属変数変換により，非線形ではあるがより取り扱いやすい方程式に変換できる．実際，r_n から ψ_n への変換

$$e^{-br_n}-1=\frac{m}{ab}\frac{d^2}{dt^2}\log\psi_n \tag{5}$$

により (4) は以下の双線形方程式に還元できる：

$$\frac{m}{ab}(\psi_n\ddot{\psi}_n-\dot{\psi}_n^2)=\psi_{n-1}\psi_{n+1}-\psi_n^2. \tag{6}$$

ここで上付のドットは t に関する微分を表す．上記方程式の厳密解法が広田の直接法である[4,5]．非線形変換 (5) の論理的説明は難しいが，ソリトン方程式の理論ではなじみの変換である．(6) の最も簡単な解は

$$\psi_n=1+e^{2(khn-\omega t+\delta)} \tag{7}$$

で与えられる．ここで

$$\omega=\pm\sqrt{\frac{ab}{m}}\sinh kh. \tag{8}$$

k，および δ は任意定数である．(7) を (5) へ代入すると

$$e^{-br_n}-1=A\,\mathrm{sech}^2(khn-\omega t+\delta) \tag{9}$$

が得られる．上式で $A=\sinh^2 kh$ は振幅である．右辺は一定の速さ ω/k で伝播する孤立波を表し，**格子ソリトン**と呼ばれている．線形波と異なり，伝播速度が波の振幅に依存するのが大きな特徴である．実際，(8) の分散式より振幅が大きい波ほどその速度は速くなることが確かめられる．

3. 連続体近似

原子の振動は巨視的には連続的につながった物体（連続体）の運動のように見える．地震波や水の波のように無限に広がった連続体の振動は波動として伝播する．格子振動の問題では，格子間隔を零に近づければ波動としての記述が容易になる．これを**連続体近似**という．物理的には，格子を伝わる波の波長が格子間隔に比べて十分長い場合に相当すると考えることもできる．これまで扱ってきた格子方程式は空間変数に関しては差分方程式であり，連続体近似の下では偏微分方程式の一種である波動方程式に還元する．このことを見るために，まず変数 $x=nh$ を n 番目の粒子の位置座標とすると，h が十分小さいとき $r_n(t)=u(nh,t)=u(x,t)$ は x の滑らかな関数と見なすことができる．微分学でよく知られているテーラー展開の公式

$$r_{n\pm1}(t)=u(x\pm h,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm h)^n}{n!}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$$

を戸田方程式(4)へ代入し h^4 の項まで取り込むと，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{abh^2}{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{b}{2}\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}\right) \quad (10)$$

と近似できる．ただし，上式の導出過程において右辺第2項と第3項は同程度の大きさであると仮定している．方程式(10)は時間に関して2階の波動方程式であり，x 軸の左右両方向に伝わる波の伝播を記述する．この方程式は Boussinesq 方程式と呼ばれており，水の波の理論では KdV 方程式と同様に重要な役割を演じてきた．

非線形項を無視すると，(10)は線形波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{abh^2}{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) \quad (11)$$

に帰着する．上式は進行波解

$$u=A\cos(kx-\omega t) \quad (12)$$

を持つ．ここで

$$\omega=\pm c_0 k\sqrt{1-\frac{(kh)^2}{12}},\quad c_0=h\sqrt{\frac{ab}{m}} \quad (13)$$

である．A, k, ω はそれぞれ波の**振幅**，**波数**，**角振動数**である．波の**波長** λ は，$\lambda=2\pi/k$ で与えられる．また，(12)の余弦関数の引数 $kx-\omega t$ は波の**位相**であり，これらは波動現象を記述する上での基本的な物理量である．ω と k の間の関係式(13)を**線形分散式**と言う（以下単に分散式と呼ぶ）．波の位相が一定という条件により決まる波の速度 v_p が**位相速度**であり，分散式を用いて $v_p=\omega/k$ と表せる．(12)の形の解で，振幅が等しく，波数，および角振動数がわずかに異なる2つの波を重ね合わせると，その振幅は時間的にゆっくりと変動することが示せる（いわゆるうなりの発生）．この変動の伝わる速度 v_g が**群速度**で，$v_g=d\omega/dk$ で与えられる．今の例では明らかに $v_p\neq v_g$ である．位相速度と群速度が異なる波を**分散波**と言う．両速度の定義から関係式，$v_g=v_p+kdv_p/dk$ が得られる．したがって，分散波とは位相速度が波数（あるいは波長）によって異なる波と言うこともできる．線形分散波では，位相速度，群速度のいずれも波の振幅に依存しない．

最後に，方程式(10)から右に伝わる波のみを記述する方程式を導いておく．このために次の変換を導入する：

$$\xi=\epsilon^{\frac{1}{2}}(x-c_0 t),\quad \tau=\epsilon^{\frac{3}{2}}t,\quad u=\epsilon v. \quad (14)$$

ここで ϵ は u の大きさの目安となる小さな正のパラメータ，c_0 は分散がない場合の線形波の位相速度で，すでに(13)で与えてある．上の変換を Gardner–Morikawa 変換と言う．(10)へ変換(14)を適用し，その結果を ξ で1回積分すると，ϵ^3 のオーダーより変数 v に関する KdV 方程式

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}-\frac{bc_0}{2}v\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{c_0 h^2}{24}\frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3}=0 \quad (15)$$

が得られる．

4. KdV 方程式

前節では戸田方程式の連続体近似から KdV 方程式が得られることを見た．実際，これは最低次の分散効果と非線形効果を取り入れた最も簡単な非線形分散方程式であり，いろいろな物理系において導出されている．ここでは KdV 方程式を例にとり，分散効果，および非線形効果が波の時間発展に及ぼす影響について考える．便宜上 KdV 方程式を

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0,\quad u=u(x,t) \quad (16)$$

のように書いておく．下付き添え字の t や x は偏微分を表す．以下簡単のためこの記法を用いる．また，u に対する初期条件を $u(x,0)=U(x)$ とする．

4.1 分散効果

分散の効果を見るために，線形化した KdV 方程式

$$u_t+u_{xxx}=0,\quad u=u(x,t) \quad (17)$$

の初期値問題を考える．解は Airy 関数による積分表示で書けるが，その具体的表示はここでは省略する．図1に初期条件を

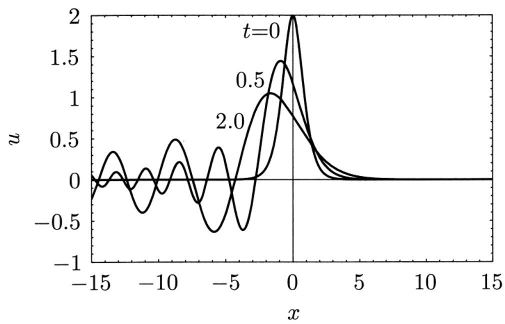


図 1　分散効果によるさざ波の発生.

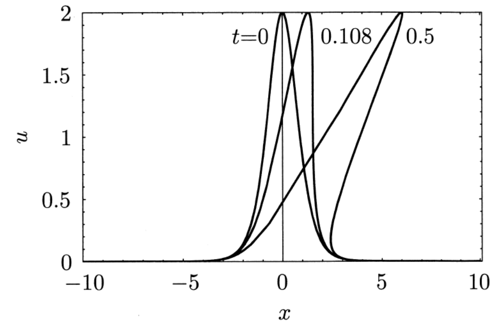


図 2　非線形効果による波の突っ立ち.

$$U(x) = 2\,\mathrm{sech}^2 x \tag{18}$$

としたときの u の時間発展の様子を示す．波の最大波高位置（$x = 0$）は時間とともにゆっくりと負の方向に移動し，それと同時に後方にさざ波が発生していることがわかる．線形方程式 (17) の分散式 $\omega = -k^3$ から群速度を計算すると，$v_g = -3k^2$ となり，波長の短いさざ波ほど早く左に進む（分散する）ことがわかる．

4.2 非線形効果

KdV 方程式で分散項を無視した非線形方程式

$$u_t + 6uu_x = 0, \quad u = u(x,t) \tag{19}$$

を，与えられた初期条件の下で解いてみよう．解は陰的に $u(x,t) = U(x - 6ut)$ のように表せるが，これを u について陽に解くことは一般には不可能である．代わりに変数 y による解のパラメータ表示

$$u = U(y), \quad x = y + 6\,U(y)t \tag{20}$$

を用いるのが便利である．(20) が方程式 (19)，および初期条件を満たすことは簡単な計算で確認できる．u の x に関する偏導関数を計算すると，$u_x = U'/(1+6\,U't)$ となる．分母が最初に零となるのは $1+6\,U't = 0$ を満たす最小の時間 $t = t_{\min}$ においてであり，このとき解には無限勾配が生じる．図 2 は初期条件 (18) の下での解の時間発展を示す．この例では $t_{\min} = \sqrt{3}/16 \simeq 0.108$ である．また，解の無限勾配は $x = \tanh^{-1}(1/\sqrt{3}) + \sqrt{3}/2 \simeq 1.52$ において起こる．以上の簡単な考察からわかるように，初期波形は非線形効果により有限時間において突っ立ち，その後は物理的に無意味な多価関数に移行していく．それでは分散性と非線形性が共存すると解の振舞いはどうなるであろうか．結論から言うと，両効果のつり合いにより形を変えないで伝わる孤立波解が存在し，これが次に述べるソリトン解である．

4.3 ソリトン解

KdV 方程式の厳密解法は，現在，逆散乱法をはじめとしていくつか知られているが，ここでは広田の直接法を用いる．まず，従属変数変換

$$u = 2(\log\,f)_{xx} \tag{21}$$

を導入する．(21) を (16) へ代入し，x で積分したのち積分定数を零とおくと，f に関する双線形方程式

$$f_{xt}f - f_x f_t + f_{xxxx}f - 4f_{xxx}f_x + 3f_{xx}^2 = 0 \tag{22}$$

が得られる．なお，(21), (22) は (5), (6) に連続体近似，および Gardner–Morikawa 変換を施すことによっても導かれることを注意しておく．

孤立波解（あるいは 1-ソリトン解）は，(22) の一つの解

$$f = 1 + e^{\xi}, \quad \xi = k(x - k^2 t - x_0) \tag{23}$$

に対応している．実際，(23) を (21) に代入することにより

$$u = \frac{k^2}{2}\,\mathrm{sech}^2\,\frac{\xi}{2} \tag{24}$$

が得られる．上式で $k^2/2$，および x_0 はソリトン

の振幅，および初期位置を表す任意定数である．ソリトンの速度は k^2 であり，したがって振幅に比例する．実は，初期条件 (18) は (24) において $k=2, x_0=0$ とおいたものであり，これを KdV 方程式の初期値として与えると，$t>0$ においてはその形を変えることなく，一定の速度で伝播する．分散による波の広がり効果と，非線形による波の突っ立ちの効果がつり合って，任意の時間においても波形を保っているわけである．

それでは，これに外部から何らかの攪乱が加わった場合，その波形はどうなるであろうか．ソリトンとは，攪乱によっても壊れない，まさに粒子のように振る舞う波のことを言うのである．ここで議論している KdV 方程式の孤立波はソリトンであることが証明されている．KdV 方程式には任意個数のソリトンを含む，多重ソリトン解（あるいは N-ソリトン解，N：正の整数）が存在することも知られている．この解の著しい特徴は，個々のソリトンは衝突によって形は変えず，非線形効果は衝突による各ソリトンの相対位置のずれ（位相のずれ）としてのみ現れることである．

5. Camassa–Holm 方程式

Camassa–Holm（CH）方程式は KdV 方程式と同じく浅水波のモデル方程式として導出されたものであるが，その新奇な数学的な構造ゆえ，ここ十数年来活発な研究が行われている[6~8]．ここでは特にソリトン解の性質に焦点を絞って述べてみたい．CH 方程式は変数の適当な無次元化の下で以下のように表せる：

$$u_t+2\kappa^2u_x-u_{txx}+3uu_x-2u_xu_{xx}-uu_{xxx}=0,$$
$$u=u(x,t). \tag{25}$$

ここで κ は分散波の位相速度に関連した正の定数である．(25) を線形化し，分散式を求めると $\omega=2\kappa^2k/(1+k^2)$ となる．KdV 方程式 (16) に線形項 c_0u_x を加えた方程式の対応する分散式，$\omega=c_0k-k^3$ と比べると長波数 $k\gg1$ での振舞いが異なることがわかる．

CH 方程式の N-ソリトン解としては以下のようなパラメータ表示が知られている[9]：

$$u=\left(\log \frac{f_2}{f_1}\right)_t, \quad x=\frac{y}{\kappa}+\log \frac{f_2}{f_1}+d. \quad (26)$$

ここで f_1, f_2 は N 次の行列式，d は定数である．パラメータ表示 (20) との類似性に注意されたい．

1-ソリトン解を得るには (26) において

$$f_1=1+\frac{1+\kappa k}{1-\kappa k}\,e^{\eta}, \quad f_2=1+\frac{1-\kappa k}{1+\kappa k}\,e^{\eta} \quad (27)$$

とおけばよい．ここで $\eta=k\{y-2\kappa^3 t/(1-(\kappa k)^2)-y_0\}$ である．これから出る y を (26) の x の右辺へ代入し，定数 d を適当に選べば，位置座標 x の η によるパラメータ表示

$$x-ct-x_0=\frac{\eta}{\kappa k}+\log \frac{f_2}{f_1} \qquad (28)$$

が得られる．上式左辺の c はソリトンの伝播速度で

$$c=\frac{2\kappa^2}{1-(\kappa k)^2}, \quad 0<\kappa k<1 \qquad (29)$$

で与えられる．

CH 方程式のソリトン解には，従来のソリトン解には見られない際だった特徴が見られる．いわゆる**ピーコン**（peakon）解の存在である．CH 方程式のソリトン解の零分散極限での振舞いを調べるために，速度 c を一定に保って極限 $\kappa \to 0$ をとってみよう．図 3 にそのときの様子を示す．κ が小さくなるにつれて解の突っ立ちが起こるが，極限 $\kappa \to 0$ では一定の波形に漸近する．この極限波形をピーコンと呼んでいる．式で表すと

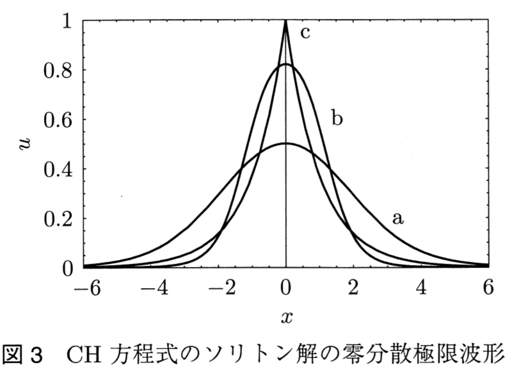


図 3　CH 方程式のソリトン解の零分散極限波形 a : $\kappa=0.7$, b : $\kappa=0.6$, c : $\kappa=0.01$.

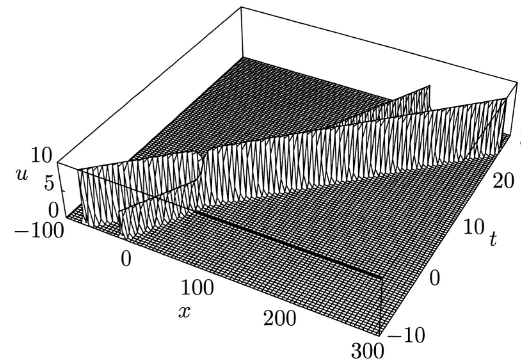


図 4　ピーコンの相互作用：$c_1=10$, $c_2=5$.

$$u=c\,e^{-|x-ct-x_0|} \qquad (30)$$

となるが，これは振幅の大きさに等しい速度で伝播する孤立波である．特に注目すべきは，(30) は通常のソリトンの波形と異なり，波の頂上はとがっており，ここでは微分係数は存在しない点である．数学ではこのような解を弱解と言う．Camassa と Holm は (25) の零分散方程式（$\kappa=0$ とおいた式）から出発してピーコン解を得たのである．その際，各ピーコンの位置座標は有限次元の，非線形ではあるが可積分な運動方程式に従うことに注目した．N-ピーコン解は，N-ソリトン解に零分散極限操作を施すことにより構成することも可能である[10]．

図 4 に振幅が異なる 2 個のピーコンの相互作用の様子を示す．衝突前後でピーコンの形は変化せず，ソリトンとしての性質を保持していることがわかる．衝突により各ピーコンは位相のずれを起こすが，その特性は KdV 式のソリトンのそれとは異なっている[6,7,9]．

非線形分散波動方程式の零分散極限での解の漸近挙動は，分散項の形に依存して異なる特性を示す．これは波の変調問題として知られており，最初，Whitham によって現象論的な立場から論じられた[11]．その後，Lax と Levermore による厳密な解析的見地からの研究が，KdV 方程式の初期値問題に対して行われ，変調理論の基礎が構築された[12]．彼らの用いた解析手法（主に逆散乱法）は，非線形 Schrödinger 方程式，Benjamin–Ono 方程式等，種々のソリトン方程式に適用され，多くの興味ある結果が得られている[13,14]．

6. おわりに

ここでは非線形振動や非線形波動現象においては，ソリトンと呼ばれる，安定な粒子のように振る舞う孤立波が存在することを見てきた．自然科学の諸分野においては多種多様なソリトンが発見されており，ソリトンという言葉は，今日では，非線形現象を特徴づける重要なキーワードの一つとなっている．1980年代半ば頃までのソリトン関連の話題については文献15) の記事が参考になる．線形，および非線形波動全般に関してはWhithamの書物[11] は今日でもバイブル的な存在である．

本稿を書くにあたり，ソリトンに関する多数の論文や解説書を参考にしたが，ごく一部を除き参考文献としては掲げなかった．最後にお断りしておきたい．

参考文献

1) C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal and R.M. Miura: *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1095; *Comm. Pure Appl. Math.* **27** (1974) 97.
2) M. Toda: *J. Phys. Soc. Jpn.* **22** (1967) 431; **23** (1967) 501.
3) 戸田盛和：『非線形格子力学』増補版，岩波書店 (1987).
4) R. Hirota: *Phys. Rev. Lett.* **27** (1971) 1192.
5) 広田良吾：『直接法によるソリトンの数理』，岩波書店 (1992).
6) R. Camassa and D.D. Holm: *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 1661.
7) R. Camassa, D.D. Holm and J.M. Hyman: *Adv. Appl. Mech.* **31** (1994) 1.
8) D.D. Holm and R.I. Ivanov: *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** (2010) 434003.
9) Y. Matsuno: *J. Phys. Soc. Jpn.* **74** (2005) 1983.
10) Y. Matsuno: *J. Phys. Soc. Jpn.* **76** (2007) 034003.
11) G.B. Whitham: *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley, New York (1974).
12) P.D. Lax and C.D. Levermore: *Comm. Pure Appl. Math.* **36** (1983) 253; **36** (1983) 571; **36** (1983) 809.
13) N.M. Ercolani *et al.* (Eds.): *Singular Limits of Dispersive Waves*, Plenum, New York (1994).
14) P.D. Miller and Z. Xu: *Comm. Pure Appl. Math.* **64** (2011) 205.
15) 別冊『数理科学』ソリトン，サイエンス社 (1985).

（まつの・よしまさ，山口大学大学院理工学研究科）

熱伝導と統計力学
異常輸送と拡散



齊藤　圭司

1. はじめに

数多く存在する非平衡現象の中で，熱伝導現象は比較的単純で直感的に理解しやすい物理現象である．理解しやすいと思えるのは，至る所に現れる現象であるからというのもあるだろう．暑い夏に冷えた部屋に入ると，熱が体から移動していくのを「体感」できるものである．現代社会の必需品であるコンピューターをいかに熱伝導率の高い伝導体で冷やすかは，現在も将来も大きな産業上の課題である．この世界には，至る所に熱の移動が現れる．

熱の移動は，巨視的な熱現象の時間の矢を決める．熱は熱いところから冷たいところに移動し，その逆はない．この哲学的とも言える時間の方向性は，熱力学では熱力学第 2 法則として一般化されている．その意味で，統計力学の基礎を考える上で，熱伝導は典型的な物理現象としての舞台を与えてきた．熱の移動の仕方の本質を捉えることは，非平衡統計力学の諸現象を考える上での大きな基盤になるのである．

固体中の熱の正体は，微視的に見れば原子の微小振動である．粒子の流れを伴わない熱の流れは，粒子の微小振動が伝搬していく流れに他ならない．そのため熱の流れは，粒子の流れとは異なる．しかしながら，熱伝導における諸現象は，多くの点で電子輸送などの粒子輸送に類似している．巨視的な系の経験則であるフーリエの法則（フーリエ則）は，電子輸送におけるオームの法則にあたる．散乱過程が消失した極限で見られる，電気伝導におけるコンダクタンスの量子化現象なども，最近ではその熱伝導バージョンが実験的に観測されている．もちろん，電子系では電子のフェルミ統計性やスピンの自由度があることにより，熱伝導にはない多彩な量子輸送現象が現れることは言うまでもない．多くの点で電子輸送から類推できる熱伝導であるが，（実験で観測がしやすいという意味でもよいので）熱伝導特有の現象はあるか？　というのは気になるところである．最近，実験技術の向上や低次元物質の発見などにより，これまで難しかった状況の熱輸送の研究が盛んになり，熱輸送特有の現象に関して理論・実験両方から理解が進んできている．ここで取り上げるのは，低次元系で見られる熱伝導現象の特徴の一つである異常輸送現象についてである．異常輸送ではフーリエの法則とは異なる奇妙な輸送と拡散を見ることができる．ここではそれらの一端に関して解説していきたい．

2. 固体比熱のデバイ理論と調和格子

非平衡現象である熱伝導を考える前に，平衡系の固体比熱を考え，熱の振舞いをどうモデル化するかということから始めたい．固体は原子が格子状に規則的に並んだものである．原子が格子を組むといっても原子間には相互作用がはたらいているので，原子は絶えず力学的運動をしている．そ

の絶え間のない運動は，格子を組んだ状態からの微小振動であり，これが固体での熱の正体である．このように考えると，熱の正体を表すモデルは，粒子が線形なバネでつながれたモデルでよいのではないかと思われる．これが，Debyeが固体の比熱を考察するためにとったアプローチである．線形なバネでつながれた連成調和振動子では，格子変位の時間変化が空間的に伝わっていく様をフーリエ級数で分解することができる．波は様々な振動数のモードで完全に表現され，全系がフーリエモードで分解されることになる．古典的な高温領域ではそれぞれのフーリエモードに k_BT（k_B はボルツマン定数，T は温度）のエネルギーが分配されることから，比熱 C はモードの数 N とボルツマン定数 k_B により

$$C = 3Nk_B \tag{1}$$

と表される．これは，古典系と見なせる高温領域での表現（デュロン–プティの法則）であるが低温領域では量子力学を考慮に入れなければならない．Debyeはこの点を考慮に入れて，有名な低温における固体比熱の T^3 則を導くことになる．

このように，固体の熱の振舞いを記述するためには，バネでつながった調和格子がよいモデルになる．また，現実の物理系では非線形ポテンシャルが必ず存在するはずであるが，その値が小さい限りこの平衡の問題では重要ではない．

3. 熱伝導現象とフーリエ則

熱の流れは，系の大きさが大きくなれば普遍的な経験則であるフーリエ則に支配される．フーリエ則は，1次元の場合で書けば以下のように書き表される．

$$j = -\kappa \frac{dT(x)}{dx}. \tag{2}$$

ここで j は単位長さあたりの熱流であり，$T(x)$ は場所 x での温度である．フーリエ則は，熱流は温度の高いほうから低いほうに流れ，その大きさは温度勾配が大きいほど大きいという直感的に理解しやすい経験則を表している．κ は熱流と温度勾配をつなぐ比例係数であり，熱伝導度と呼ばれる．簡単のために熱伝導度は温度によらないとし，定常状態に近い状態で式 (2) を時間依存の式に拡張して $j(x,t) = -\kappa dT(x,t)/dx$ としてみよう．微小領域を考え，$\delta T(x,t) \sim \delta\epsilon(x,t)/C$ のように温度変化をエネルギー変化と比熱で表現する．これらとエネルギーに関する連続の式を使うことにより，次のような温度に関する拡散方程式を得ることができる．

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\kappa}{C}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}. \tag{3}$$

つまりフーリエ則 (2) の背後には，熱が拡散的に広がるという描像が隠されているのである．フーリエ則は，粒子が密度場で駆動されるときのフィックの法則や電気伝導におけるオームの法則に相当する，巨視系に見られる普遍的な経験則である．これらの普遍的な経験則は，言い換えれば拡散方程式に従う拡散が見られるということを意味していることになる．

図 1 のように，バネで表現された熱伝導体の左右に温度 T_L および T_R の熱浴をつけて定常状態の熱伝導現象を考える．熱伝導度 κ や比熱 C が熱浴の温度領域内で温度に依存しないとき，式 (3) の右辺が 0 という微分方程式を解けば，定常状態での温度プロファイルは線形なプロファイル

$$T(x) = \frac{(T_R - T_L)x}{N} + T_L \tag{4}$$

になることが理解できる．ここで N は系のサイズである．

4. 1次元調和格子の熱伝導

固体比熱の温度依存性などを説明できた調和格

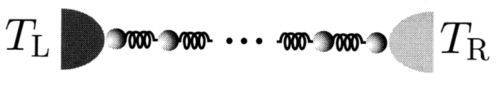


図 1　熱伝導のセットアップ．伝導体は，左右の端に異なる温度 T_L と T_R を持つ熱浴に接している．

子モデルを使って，熱伝導を考えてみよう．平衡系の固体比熱をうまく説明する調和格子は実は，フーリエ則を導出することはできない．物理的にはこの理由は明白である．前節で述べたように調和格子はフーリエモードで展開できることに注意したい．熱伝導現象ではそれぞれ独立したフーリエモードが熱を運ぶことになる．フーリエモードは端から端までつながった波であり，それぞれ干渉し合うことはない．それゆえフーリエモードによって運ばれる熱は，散乱されることなく運ばれることになる．このような輸送は，銃で撃った弾が散乱されることなく一定速度で走っていくような様子にも似ており，「弾道的輸送」と言われる．また，フーリエモードは空間的に広がった波であるため，温度勾配なども生じない．

物理的にはこれで弾道的輸送が予想できるわけであるが，数学的に厳密にこれらを証明することもできる．熱浴をランジェバンダイナミクスで表現して定常状態を厳密に解くのである．微分方程式を書き記すと以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
m\ddot{q}_1(t) &= -\frac{\partial}{\partial q_1}\left[V(0,q_1)+V(q_1,q_2)\right] \\
&\quad - \gamma\dot{q}_1 + \eta_{\rm L}(t)\,, \\
m\ddot{q}_l(t) &= -\frac{\partial}{\partial q_l}\left[V(q_{l-1},q_l)+V(q_l,q_{l+1})\right]\,, \\
&\qquad\qquad \cdots\ 2\le l\le N-1\,, \\
m\ddot{q}_N(t) &= -\frac{\partial}{\partial q_N}\left[V(q_{N-1},q_N)+V(q_N,0)\right] \\
&\quad - \gamma\dot{q}_N + \eta_{\rm R}(t). \qquad (5)
\end{aligned}
$$

ここで全系は N 個の粒子からなる．q_l は l 番目の粒子の平衡位置からの変位であり，1 番目および N 番目の粒子はそれぞれ左右の熱浴に接し，それらがランジェバンダイナミクスで表されている(図 1 を参照)．$\eta(t)$ は，ランジェバンノイズであり揺動散逸関係式

$$
\langle \eta_\alpha(t)\eta_\alpha(t')\rangle = 2\gamma T_\alpha \delta(t-t')\ , \qquad (6)
$$

$(\alpha={\rm L},{\rm R})$ を満たす．$V(x,y)$ は最近接格子間の相互作用を表すポテンシャルであり，調和格子では

$$
V(x,y)=\frac{k}{2}(x-y)^2 \qquad (7)
$$

である．Rieder, Lebowitz, Lieb らはこの方程式の定常状態を厳密に解き，熱流 j が系のサイズによらなく熱伝導度が発散すること，温度勾配が形成されないことなどを示した[1)]．

質量がランダムになれば，温度の非一様性が現れフーリエ則が現れるのでは？と思うかもしれない．このような状況も，特に 1 次元系では数学的な理解がなされている[2)]．物理的には以下のように熱の流れの振舞いが理解される．1 次元系の波はランダムネスが存在すると一般に局在化してしまう．つまり，すべてのモードは定在波として局所的にわさわさと波打っている状態になり，端に与えられた擾乱の影響はもはやもう一方の端まで届かなくなる．このような現象は，電子系では波動関数が局在化する現象として知られており，アンダーソン局在と言われている．熱伝導でも系が調和格子で表される限り，局在現象が重要になり両端の粒子がピン留めされていると，系の大きい極限ですみやかに熱流が消失してしまう．

5. 低次元非線形格子と異常輸送

いま見てきたように，質量が一様な等方調和格子はフーリエ則を説明することができない[*1)]．この性質は，少し考えると分かるが，系を 3 次元系に拡張しても同じである．また質量をランダムにしても，1 次元系ではフーリエ則を説明できないことが示される[*2)]．ここからは一様な系で，現実の物理系では必ず存在する非線形ポテンシャルの

---

*1) ただし，少しだけここで注意しておきたい．フーリエ則は系の大きさを十分に大きくしたときに得られる現象であるが，系が十分小さければフーリエ則は破れてよい．微小な系を考え十分低温で非線形性が無視できればやはり，調和格子は使える現実的なモデルになる．事実最近の実験技術の進歩により微小なスケールでの熱伝導実験が可能になり，微小領域中での弾道的な輸送は観測可能である．

*2) ランダムネスの高次元の効果に関しては，最近いくつかの興味深い結果が報告されている．例えば，A. Kundu *et al.*, *Europhys. Lett.* **90**, 40001 (2010), K. Saito and A. Dhar, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 250601 (2011) などを参照されたい．

効果について話を進めよう．

非線形性のない調和格子モデルではモード間の結合がないため，熱浴がない限りエネルギーはモード間に行き渡らない．そのため，局所的な熱化が起きずに温度勾配なども生じない．それに対して非線形性を入れれば，モード間のエネルギーのやり取りが行われるので局所的な熱化が進み温度勾配も形成され，このフーリエ則の問題は一気に片がつきそうなものである．しかしながら，低次元系で考えると，驚くべきことに非線形ポテンシャルを入れてもフーリエ則を満たすことはできない．これは，フーリエ則の起源を探る研究過程で発見された興味深い現象であり，最近は重要な研究対象となってきている．そこで，以下では低次元系に焦点を絞ってこの現象の説明をしていきたい．

微分方程式 (5) に従う 1 次元系で，粒子間ポテンシャルが，以下のように線形バネと非線形バネのポテンシャルで表される場合を考えてみよう．

$$V(x,y)=\frac{k}{2}(x-y)^2+\frac{\nu}{4}(x-y)^4. \qquad (8)$$

最後の 4 次の項が非線形項である．このモデルは，1 次元物質を表現したモデルである．粒子は特定の場所にピン留めされることはなく，隣りの粒子と相互作用している．このモデルは実は由緒正しいモデルであり，最初にこのモデルを扱った研究者の名前をとり Fermi–Pasta–Ulam (FPU) モデルと言われる*3)．

さて，非平衡定常状態での熱伝導の振舞いを考えてみよう．微分方程式 (5) を数値計算して熱流 j のサイズ依存性を見てみる．式 (2) と (4) から，フーリエ則が成立すれば，熱伝導係数が示強的な量であることと，温度勾配が $1/N$ のオーダーであることから，熱流 j は十分大きい系で $j\propto 1/N$ と振る舞うはずである．微分方程式 (5) を数値計算

*3) 彼らが最初にこのモデルを扱った目的は，平衡統計力学を成立させるために提唱されていたエルゴード仮説を数値的に検証しようとしたことであった．彼らは，モード間のエネルギーのやりとりを詳しく調べる過程で，予想に反して再起現象を発見することになる．これは数値計算を使った非線形格子研究の先駆けであり，その後の力学系研究に大きな影響を与えた．

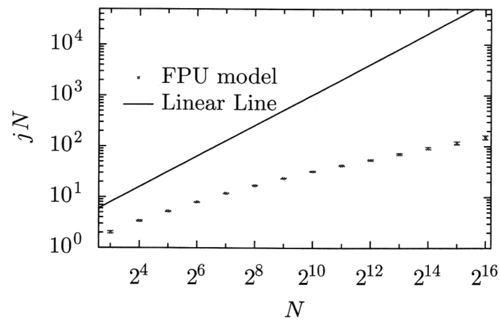


図 2 1 次元 FPU モデルにおける熱流のシステムサイズ依存性．横軸はシステムサイズ N であり，縦軸は jN である．フーリエ則が成立するならば，縦軸は一定値に落ち着くはずであるがベキ発散していく様子が見える．実線は，弾道的輸送に相当する線形な線である．

することにより，熱流 j のサイズ依存性をプロットすると，図 2 のようになる．この図で分かるように熱流は $1/N$ にならず，フーリエ則が破れていることが分かる．むしろ熱流は異なるベキを持つように見える[3]．つまり

$$j\propto\frac{1}{N^{1-\alpha}},\quad 0<\alpha<1 \qquad (9)$$

のように見えるのである．大事なことは，輸送の振舞いが弾道的 $(\alpha=1)$ でもなく，拡散的 $(\alpha=0)$ でもない中間の値を持つと言うことである．拡散的でない輸送現象は，一般に異常輸送現象と呼ばれる．熱輸送の文脈では弾道的でも拡散的でもない $0<\alpha<1$ の領域を特に限定して異常輸送と言うこともあり，ここではこの特別な場合の呼び方に従う．

異常輸送の原因は，輸送係数と平衡系の流れの相関関数とをつなぐ久保公式

$$\kappa=\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T^2}\int_0^\infty dt\,\langle j(0)j(t)\rangle_{\mathrm{eq}} \qquad (10)$$

を使って調べられることが多い．孤立した FPU モデルでは，全エネルギー以外に全運動量が保存することから各粒子たちはそれらを保存するように「周りを見渡しながら」運動することになる．周りを気にしながらの運動は，好き勝手運動するときに比べ物理量の緩和がゆっくりすることになる．その結果流れの相関関数はベキ緩和になり久保公式は発散することになる[3]．具体的な α の値に関

しては，輸送係数に関する繰り込みを使った議論など[4]多くの研究があるが，誰もが認める決定打は未だにないのが現状である．

我々は日常生活でこのような異常な輸送に遭遇することはなく，この現象はFPUモデルに限ったもので普遍的とは全く言えないに違いないと考える読者も多いと思われる．フーリエ則が巨視的な系を支配する普遍法則であると我々は知っているのだから，そのような反応はもっともである．しかしながら，実はフーリエ則は3次元での普遍則であり，1次元などの低次元ではむしろ異常輸送になることのほうが普遍的なのである．事実，1次元FPUモデルを3次元まで拡張するとフーリエ則が回復していくことが，数値的な範囲で報告されている[5]．最近は擬1次元物質であるカーボンナノチューブを使って，異常輸送に関する実験も報告されはじめている[6]．

6. 異常輸送と異常拡散

フーリエ則を満たす正常な輸送では，熱は拡散方程式 (3) で拡散することになるが，異常輸送ではどのように微視的な熱が拡散するであろうか？ 輸送が異常なのだから拡散だって異常だろうと思うのは普通である．この感覚を緻密化するためには，拡散が異常であることを数学的に特徴付けることから始めなければならない．簡単のために1次元系で相互作用のない粒子の運動を考える．拡散の様子を調べるにはその分散 $c(t)=\langle(x(t)-x(0))^2\rangle$ を調べればよい．正常な拡散現象では $c(t)\propto t$ である．異常拡散は，

$$c(t)\propto t^{\gamma}, \quad \gamma\neq 1 \tag{11}$$

のような時間依存性によって数学的な特徴付けがなされる．$\gamma=2$ は粒子が散乱を受けずに弾道的に運動することを意味する．異常輸送が弾道的輸送と正常輸送の中間なのだから，異常拡散が微視的な拡散のメカニズムであるのなら $1<\gamma<2$ が異常輸送を説明する領域のはずである．

このような異常拡散を実現させる機構の一つがレビーウォークである．レビーウォークでは粒子が一定速度 v で時間 τ だけ走り，そこで「散乱」が起きて左右どちらかの向きに進むかが確率 $1/2$ で選ばれ，再び一定速度で走る．この散乱されるまでの時間 τ が確率 $\phi(\tau)$ で割り振られるというのがルールである．異常拡散は，τ の平均 $\langle\tau\rangle$ は有限であるが分散 $\langle\tau^2\rangle$ が発散するときに起きる．これを実現するための典型的な確率分布は

$$\phi(\tau)=\frac{\beta}{\tau_0}\frac{1}{(1+\tau/\tau_0)^{\beta+1}} \tag{12}$$

である．$1<\beta<2$ に限定すると，簡単な解析から β と γ とが

$$\gamma=3-\beta \tag{13}$$

と関係付けられる．

熱輸送と結びつけるために，これらの粒子が一定のエネルギーを持ち熱を運ぶという設定を考える．FPUモデルでは，熱は粒子によって運ばれるわけではないので，この考え方は少々無理があるように思われるかもしれない．しかしここでは，微視的な熱運動がレビーウォークであることを主張したいのではない．正常輸送の場合粒子のブラウン運動の描像でも熱の拡散方程式 (3) が出るように，温度分布など分布関数レベルの時間発展方程式が，レビーウォークから出てくるそれと一致するであろうということを主張したいのである．それゆえ粒子描像による簡単化は，十分に意味がある．

輸送現象を考えるためには，熱浴（今の粒子描像では粒子浴）をつける必要がある．粒子浴をここでは1次元的に系を延長した系として記述してみる（図3参照）．粒子浴内では各場所で粒子が散乱される確率が一定で粒子密度も一定であるようなダイナミクスを採用する[7]．このような設定で定常状態を求めると定常状態での熱流（この場合粒子流）j のサイズ依存性は

$$j\propto N^{1-\beta} \tag{14}$$

と計算され異常拡散が異常輸送を再現することになる．

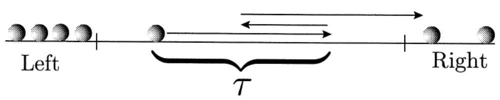


図 3 レビーウォークによる輸送現象を考えるための概念図.

正常輸送ではフーリエ則 (2) が成り立ち，流れが局所的な温度勾配に比例していたわけだが，異常輸送ではどうなるか？というのも自然な疑問である．このモデルの範囲内では系が十分に大きいとき具体的に式で書き下すことが可能になり，以下のように流れと温度勾配（この場合粒子密度の勾配）の関係式が得られる．

$$j = -\frac{v}{2\langle\tau\rangle}\int_0^N dy \chi\left(\frac{|x-y|}{v}\right)\frac{dT(y)}{dy}. \quad (15)$$

この式は定常状態での式なので x によらず値は一定になることが示される．$\chi(t)$ は，$\chi(t) = \int_t^\infty ds' \int_{s'}^\infty ds'' \phi(s'')$ である．ここで教訓的なのは，異常輸送のときは流れと温度が非局所的に結びついている点である．$\beta \to 2$ で正常輸送に近づくと，この式はフーリエ則 (2) に漸近していく．

このようにレビーウォークモデルは，FPU モデルで見たような異常輸送を再現するので，ミクロな拡散はレビーウォーク的な拡散であることがもっともらしいことが分かる．他にも直接的な証拠を見る方法として，FPU モデルにおいて，ある場所を熱的に励起したときどのように熱が広がっていくかを見る方法もある[8)]．正常拡散を記述する拡散方程式 (3) を初期状態がデルタ関数であるとして解くと，ガウス波束が時間的に広がっていくという解が得られる．レビーウォークで同じことをやると，ガウス波束の広がりと同時に，弾道的に広がっていくフロントが形成され，ちょうど正常拡散と弾道的拡散の中間のような状況になる．FPU モデルでもまさにこのような時間発展を見ることができ，レビーウォーク的描象は支持されるのである．

7. おわりに

低次元系で見られる異常輸送現象を中心に，その一端を紹介した．熱伝導現象の統計力学的考察の歴史は古く，主にこれまでフーリエ則などの普遍的現象をミクロな力学系から如何に導出するかが話題の中心であった．最近の研究では低次元系で見られる異常輸送にも焦点が当てられ，フーリエ則と異なる物理的側面が少しずつ解明されてきている．数値計算はもちろん，ここで紹介した確率理論に基づく解析計算，また低次元物質を用いた実験など幅広いアプローチにより研究がなされているのが特徴である．実験などは始まったばかりと言えるが，これからますます重要性を増していくに違いない．これからは現実的な実験の測定を念頭に入れた研究も必要になっていくであろう．

最後に，本稿を丁寧に読んでいただき，貴重な意見を頂いた白石直人氏に感謝したい．

参考文献

1) Z. Rieder, J.L. Lebowitz, and E. Lieb, *J. Math. Phys.* **8**, 1073 (1967).
2) H. Matsuda and K. Ishii, *Prog. Theor. Phys.* **45**, 56 (1970).
3) S. Lepri, R. Livi, and A. Politi, *Phys. Rep.* **377**, 1 (2003).
4) O. Narayan and S. Ramaswamy, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 200601 (2002).
5) K. Saito, and A. Dhar, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 040601 (2010).
6) C.W. Chang *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 075903 (2008).
7) A. Dhar, K. Saito, and B. Derrida, arXiv: 1207.1184.
8) V. Zaburdaev, S. Denisov, and P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 180601 (2011).

（さいとう・けいじ，慶應義塾大学理工学部）

戸田盛和
日本の振動論のパイオニア

渡辺 慎介

◇振動論のパイオニア？

戸田先生を戸田盛和と呼び捨てにするのは，尊敬する先生には畏れ多く，抵抗を感じるのと同じように，戸田を振動論のパイオニアとするのもしっくりしない．前者は個人の経験であるからどうでもよいことなのだが，後者は著書や論文を通して戸田盛和なる物理学者に接した方にも，「あれ！戸田先生の専門は振動論だったの？」との疑問を抱かせかねない類の違和感である．それを払拭すべく，このコラムに書くことにしよう．

◇物理をすべて理解する

多くの読者が覚える違和感は，こんなものではなかろうか．

第一に，日本における振動論のパイオニアといえば，間違いなく坪井忠二だろう．その著書『振動論』は，1942年に河出書房から出版され，振動論全体を網羅する大著である．少なくとも物理の分野で振動論を集大成したのは坪井の『振動論』をもって嚆矢とする．

寺田寅彦の弟子，地球物理学者，地震学者，そして随筆家，その坪井がその本を著したのは，ご自身の専門とする地震学の基礎として振動論を解説したい，そんな思いがあったからに違いない．

つまり，戸田を振動論のパイオニアとするにはためらいを感じる，ということになる．

専門分野から戸田の足跡を辿ってみよう．雑誌の記事などで，ご自分の専門を書かなければならないとき，そこに「理論物理学」と自己紹介をされていたのを記憶している．自分の得意とする分野名で紹介することはなかった．そこには，一つの専門分野にとらわれることなく，物理学全体を理解しようとする明確な哲学がある．実際に，戸田は自分で理解した物理の全体像を，自分の言葉で書き表したたくさんの書物を残した．その中でも，守備範囲の広さを物語るのが，全10巻からなる「物理学30講シリーズ」（朝倉書店）であり，全4巻の「物理読本」（岩波書店）であろう．しかも，前者の最終巻の発行は，亡くなる約8年前，85歳の少し前であった．

一つの分野に閉じこもるのを嫌い，常に物理の全体像に興味を持ち続けていたのが，戸田盛和である．いわゆる振動論という一つの分野に閉じこめてしまうのは，やはり無理がある．

◇格子研究グループとソリトン

話を研究に移そう．大学卒業後，液体論や量子統計力学をはじめとする統計力学を中心に研究を進めていた戸田にとって転機になる研究会が，1961年に発足した．それは，京都大学基礎物理学研究所の研究会 Dynamical Problems in Statistical Physics であり，同時に発足した短期研究会「不完全結晶の格子振動」と，それに続く「振動子の力学過程と統計」である．戸田をはじめ，これらの研究会に参加した研究者は，その集団を格子振動グループと呼び，そこでの研究活動をいつも誇らしげに語っていた．

相互作用が非線形でありながら，厳密解を持つ戸田格子の発見，戸田ソリトンの発見は，格子振動

グループから生まれたといっても過言でない．グループは研究会を開催するたびに，これから研究すべき課題を議論していたが，その中に，非線形，厳密解の語も出る．戸田格子の発見は，格子振動グループが解散した1965年の少し後ではあるが，その研究グループの影響を間違いなく受けている．

1967年に，戸田格子の論文を発表してからの戸田は，統計力学への興味を持ち続けながらも，非線形波動を中心とした数理科学へと研究の軸足を移す．Zabusky と Kruskal によってソリトンの概念が導入された直後に戸田格子が発見されたため，その論文はたちまち全世界に知れわたった．

◇おもちゃと随筆

戸田は旧制高等学校の頃，寺田寅彦の随筆に触れて，強い影響を受けた．建築を志望していたが，次第に自然科学に興味を移し，ついには「寺田先生のような，割合に自由に好きなことをやっている，そういう自然科学をやりたい」と考えるようになったという．

高等学校の頃に描いていたその夢のとおりに，戸田は生涯を送った．世界的に知られる研究業績を残しながら，自然科学やおもちゃの随筆を書き，また，折に触れて絵をたしなんだ．その中でも，特に知られているのは，おもちゃだろう．新しいおもちゃを見つけると，まずその仕組みを自分で想像し，きっとこういう機構に違いないと納得してから，それを買い求める，そんな楽しみ方もしていたようだ．自分の言葉で物理を語ったのと同じように，おもちゃの仕掛けを平易に，しかも味わい深い文章でつづる，おもちゃ博士と呼ばれる所以である．

敬愛する寺田寅彦にじかにお目にかかる機会のなかった戸田であろうが，弟子の坪井忠二とは浅からぬお付き合いであったから，おそらく坪井を通して，寺田の人となりに触れることができたのだろう．寺田，坪井，戸田と続く3人は，名文家の物理学者として長く語り継がれることになるだろう．

◇最後の物理学者？

坪井の『振動論』が出版されてから26年後，今度は戸田に同じ題名の本を出版する番が回ってきた．培風館から1968年に刊行された戸田盛和著『振動論』は，しかしながら，坪井のそれとは趣を異にする．

単振動，パラメタの周期的変化，非線形振動と，どの本でも取り上げられるテーマを多くの例を引き合いに出しながら足早に進むと，第4章でテーマをがらりと変える．作用変数と量子力学における振動，を取り扱う．作用変数と，それに正準共役な角変数を導入し，例えば長さがゆっくり変わる単振り子の運動を断熱定理によって解析する．さらに，量子力学の振動では，エネルギーが連続することなくとびとびの値を持つことを示し，固体内電子のエネルギー帯にも話しが及ぶ．

最後の2章，多自由度の振動，連続体の振動では，非線形の格子振動と非線形波動にも触れる．特に，多自由度の振動では，双対格子の導入から戸田格子発見に至る道筋が記される．

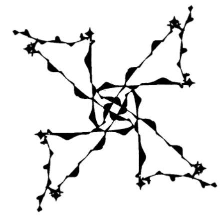
戸田の『振動論』は，二つの意味で先駆的な意味を持つ．第一は，振動を論じながら物理全体に少しでも触れようとする姿勢が，量子力学の解説などに見られる点である．第二は，当時の振動論における最先端の話題として，戸田格子や K-dV 方程式など，自らも開拓に加わった非線形波動・ソリトンの説明をおそらく世界ではじめて著した点にある．

この著書に見られる視野の広さと研究の独創性こそ，戸田盛和を日本における振動論のパイオニアと呼ぶのにふさわしい理由なのである．

ただし，忙しない今の学問の世界にあって物理全体を理解しようとする物理学者が，再び現れるだろうか，やや気になる．戸田はパイオニアでありながら，物理全体を理解した最後の物理学者になりかねないからだ．

（わたなべ・しんすけ，学校法人関東学院，横浜国立大学名誉教授）

生命システムの振動現象とミクロ・マクロリンク



郡　宏

1. はじめに

振動現象は自然界に無数にあるが，エネルギー的あるいは物質的に開放された**非平衡開放系**で現れる振動現象はリミットサイクルによって記述され，閉じた系には見られない特有の現象や性質を示す．またそのような振動子集団が相互作用した系では，**同期現象**や時空カオスといったバラエティに富んだ協同現象が現れ，工学，化学，生物学などの様々な分野で極めて重要な研究対象となっている．特に，生命システムには様々な振動現象（生物リズム）があり，その背後には，個々の細胞の作る振動が相互作用することによって起こる同期現象がある．

本解説では，まず，リミットサイクルと同期現象について，生物リズムの代表例である**概日リズム**（約 24 時間の体内時計）を例に簡単に紹介する．ついで，著者らが近年行った，同期する振動子集団におけるミクロ・マクロリンクの研究を解説する．この研究では，個々の振動子の性質（ミクロ）と集団としての性質（マクロ）がどのように関係するかを定式化する．さらに，その応用として，個々の振動子の持つゆらぎの大きさと同期した集団の持つゆらぎの大きさの関係を，任意のネットワーク構造に対して定式化する．

生物においては，個々の細胞の示す振動が強いゆらぎを内包してるのに対し，細胞集団が相互作用している場合は，細胞数とともにゆらぎが抑えられることが観測されている．本稿で紹介するミクロ・マクロリンクによって相互作用する動的素子のゆらぎの減衰則が明らかにできる．

2. 非平衡系の振動現象—リミットサイクル—

まず，リミットサイクルについて簡単に解説する．エネルギーの保存している系では，そのエネルギー状態によって振動の軌道が決まり，摂動を受けると異なるエネルギー状態に対応する軌道に遷移してしまう．一方，メトロノームの針は，ゼンマイをエネルギー供給源として切り離して考えるとエネルギー開放系であり，エネルギー保存則は適用できない．針が中心付近を通過するとき，針はその進行方向にはじかれるようになっている．これによって，針はゼンマイから運動エネルギーを得る．また，摩擦などによって，針はエネルギーを失う．振動振幅が大きいほど，1 周期の間に針の運動する距離は伸びるので，より多くのエネルギーを失う．1 周期で獲得するエネルギーが失うエネルギーよりも大きいとき，針はより大きな運動エネルギーを持ち，その結果，振動振幅が大きくなる．逆に，1 周期で獲得するエネルギーより失うエネルギーが大きいとき，振動振幅は小さくなる．この結果，針の 1 周期で獲得するエネルギーと失うエネルギーは自然とバランスする．摂動が加わってもまたバランスした状態に自然に戻るので，この状態は安定である．このような振動は，数学用語でリミットサイクルと呼ばれる．時間無限大のリミットで得られるサイクルという意味であ

る．調和振動などのエネルギー保存系に現れる振動現象には，このような安定性がないことに注意したい．

生命システムは非平衡開放系である．心拍や体内時計といった種々の生物リズムには安定性があり，リミットサイクルであると考えられる．実際，生物リズムの機構を数理モデル化すると，リミットサイクルが得られる．

リミットサイクルの一例として，概日リズムの数理モデルの中でも特に簡単なLemaらのモデルを紹介する[1]．概日リズムは時計遺伝子と呼ばれる複数の遺伝子の働きによって各細胞内で作られる．細胞内ではこれらの遺伝子から発現するタンパク質が約24時間周期で増減を繰り返す．その振動機構は**負のフィードバック**である．つまり，時計遺伝子の働きによって生成されたタンパク質が，時計遺伝子の働きを抑制する抑制物質にやがて変化し，時計遺伝子に作用する．このとき，抑制物質の生成や遺伝子への作用に数時間程度の時間を要することが知られている．このプロセスを簡潔にモデル化したのがLemaらによって提案された次式である．

$$\frac{d}{dt}P(t) = vf(P) - kP. \qquad (1)$$

ここで $P(t)$ は時刻 t におけるタンパク質量である．右辺第2項はタンパク質の分解を表し，k は分解率である．右辺第1項はタンパク質の合成を表す．v は最大発現率であり，関数 f はタンパク質の増加による発現率の低下を記述する．ここでは $f(P) = \frac{1}{1+(P(t-\delta)/P_0)^n}$ とする．δ は時間遅れ，P_0 は発現率が半分になる P の量，n はHill係数と呼ばれるパラメタで抑制の効き方のシャープさを表す．このモデルは広いパラメタ領域でリミットサイクルを示す．適当なパラメタ値と初期条件を与え，十分な時間シミュレーションを行うと，系はある周期軌道（リミットサイクル）を描く（図1(a)）．なお，時間遅れがなく，また，時間に陽に依存しない1変数の1階の微分方程式ではリミットサイクルは現れない[2]．

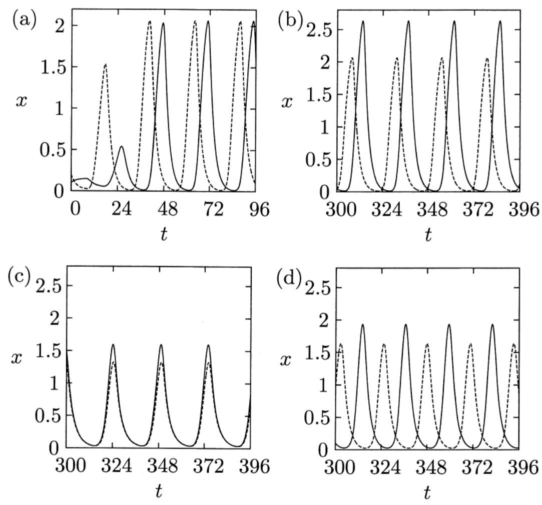


図1　概日リズムモデルの時系列．(a) 異なる初期値に対する時系列．初期値に依らず同じ周期軌道に収束する．$v=1.0, n=3.0, P_0=0.04, \delta=8.0$．振動周期は約23.7．振動子1（実線）と2（点線）の初期値はそれぞれ $v(t)=0.1$ と $v(t)=0.2$ $(t \leq 0)$ としている．(b), (c), (d) パラメタの異なる2つの振動子の時系列．振動子1（実線）は $v=1.3$ としている．他のパラメタは(a)と同じ．(b) は相互作用なし（$c=0$）．振動子1の自然振動周期は24.1．2つの振動子の位相差は時間とともに変化しているが，周期の差が小さいためこの図ではわかりづらい．(c) 相互作用あり（$c=0.1$）．結合の遅れ $\mu=2$．同相同期が得られる．周期は約24.9．(d) 相互作用あり（$c=0.1$）．$\mu=8$．逆相同期が得られる．周期は約22.6．

3. 結合振動子の同期

細胞内で起こる振動は，細胞間の物質のやり取りを介して相互作用する．リミットサイクルは相互作用すると様々な協同現象を起こすが，中でも同期はよく見られる現象である．概日リズムは各細胞で起こる振動現象であるが，体全体のリズムは**視交叉上核**と呼ばれる脳の部位によって統率されている[2]．視交叉上核は数万の細胞集団の相互作用系である．細胞の性質にはばらつきがあるが，相互作用によって部位全体で同期したリズムを形成している．

ここでは少し性質の異なる2つの振動子の同期を調べてみよう．式(1)で記述される2つの振動

子の結合系を考える．

$$\frac{dP_1}{dt} = v_1 f(P_1) - kP_1 + cg(P_2), \quad (2a)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = v_2 f(P_2) - kP_2 + cg(P_1). \quad (2b)$$

ここで相互作用を表す関数 g を $g(P) = \frac{P(t-\mu)}{1+P(t-\mu)}$ とする．ここでは，タンパク質 P の増加は，時間遅れ μ を伴って細胞間結合を担う物質を生成し，この物質が他の細胞の P の増加を促すように作用すると仮定している．単純に $g(P) = cP$ としても結果はほとんど変わらないが，生化学反応や遺伝子制御ネットワークでは物質が増加しすぎるとその効果が頭打ちになるという性質が一般的なので[3]，そのような関数 $g(P)$ を仮定した．

v_1 と v_2 の値が異なれば，2 つの振動子のそもそもの振動波形は異なる（図 1 (b)）．特に，振動周期は一般には一致しない．しかし，相互作用が十分に強ければ，2 つの振動子の振動周期は完全に一致する．これを同期と呼ぶ．図 1 (c), (d) に典型的な時系列を表示した．このモデルの場合は，結合の時間遅れ μ が小さいときは位相がほぼ一致する**同相同期**，μ が大きいときは位相がほぼ逆転する**逆相同期**が得られる．いろいろな μ の値に対してシミュレーションをすると，$\mu = 5.5$ の近傍で同相同期から逆相同期に切り替わることが確認できる．

4. 位相振動子モデル

生命システムは，個々の分子プロセスの理解が不十分なことが多く，その数理モデル化は必然的に経験論的に行われることになる．そのため，モデルが本当に正しいのか，疑問が常につきまとう．

モデルの詳細に依存しないような一般的性質に興味がある場合は，必ずしも生物学的に妥当な数理モデルを構築し解析する必要はない．むしろ，解析計算に向く単純でパラメタ数の少ない数理モデルを用いるほうが，はるかに理解が深まることがよくある．このような立場において，次式で与えられる**位相振動子モデル**は大変有用である[2, 4]．

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^{N} A_{ij} h(\phi_i - \phi_j). \quad (3)$$

ここで，$\phi_i(t)$ $(0 \leq \phi < 2\pi)$ と ω_i は，それぞれ，振動子 i $(1 \leq i \leq N)$ の位相と固有振動数，関数 h は振動子間の相互作用を記述する 2π 周期関数，A_{ij} は振動子間の結合ネットワークを記述する**隣接行列**である．これは蔵本によって確立されたモデルであり，リミットサイクル間の相互作用が弱いときに妥当な数理モデルである[5]．相互作用が弱いと，個々の振動子の描く軌道は，相互作用していないときのリミットサイクルから少ししかずれない．そのずれの効果を摂動として取り込むことによって (3) が導出される．このモデルを使うと，2 つの振動子の同相同期や逆相同期の条件や振動子集団の同期など多くのことが解析的に調べられる．導出や同期の解析についてはここでは立ち入らないので他書や本誌の過去の解説を参考にしていただきたい[2, 4, 6]．

5. 振動子ネットワークのミクロ・マクロリンク

ここからは，振動子ネットワークに関する近年の研究成果を解説する．

次の状況を想定してみよう．振動子集団が複雑なネットワークを介して相互作用しており，それによって同期しているとする．このネットワークから 1 つ振動子を選び短時間の外部入力を与える．すると，その振動子のダイナミクスが変化し同期状態が一時的に乱されるが，しばらく時間がたつと，再びもとの同期状態に戻る．このとき，全体の位相は，入力を与えなかった場合の位相と異なるはずである．さらに，位相の変化量は，どの振動子が入力を受けたかに依存するであろう．これを定式化したい．この問題は，各振動子（ミクロ）の動的性質と，振動子ネットワーク全体（マクロ）の動的性質を関係づける，ミクロ・マクロリンクの試みである．

この問題は生命システムにおいて特に重要である．例えば，視交叉上核は光の影響によって外界の日周期と同期するが，光の情報に能率よく応答するためには，どのような細胞間ネットワークを

持ち，そしてどの細胞群が入力を受けるべきか．この問題を通して，細胞間ネットワークの設計原理を洞察できる．

次の位相振動子モデルをスタート地点とする．

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega + \sum_{j=1}^{N} A_{ij} h(\phi_i - \phi_j) + \epsilon p_i(t). \quad (4)$$

ここで，すべての振動子が同一の振動数 ω を持ち，相互作用関数 h もすべての振動子間で同一のものであるとしている．$\epsilon p_i(t)$ は振動子 i の受ける外部入力で，ϵ は入力の大きさである．簡単のため，$h(0) = 0$ を仮定する．すると，外部入力がないとき，同相同期解 $\phi_i = \omega t + C$（$1 \le i \le N$, C は任意の定数で以後 $C = 0$ と置く）が存在する．この解の安定性も仮定する．つまり，適当な初期条件から時間発展させると，外部入力のないときは，系は同相状態に自発的に接近する．隣接行列 $A = (A_{ij})$ を定数倍することにより，一般性を失わず $(d/d\phi)h(\phi)|_{\phi=0} = -1$ とする．行列 A によって表現されるネットワークは，有向（つまり，一般には A は非対称）とする．さらに，分離していないネットワークを仮定する．つまり，結合経路をたどることによりすべてのノードにたどり着ける出発点のノードが最低1つ存在するとする（ネットワークの性質を議論する場合は，振動子のことをノードと呼ぶ）．同相状態の安定性は隣接行列によって決まる．もし A_{ij} のすべての成分が非負であれば，安定であることが証明できる[7]．正負が混合していても同相同期の安定になり得るが，その条件は非自明である．以上，かなり単純な設定をしたが，より複雑な状況への拡張が可能である[8]．

式 (4) で表される系に対して，何らかの集団変数を定義し，その発展方程式を導くことが目的である．つまり，振動子ネットワークの縮約理論を構築したい．結論から言うと，ϵ の最低次で次の式が導出できる．

$$\frac{d\Theta}{dt} = \omega + \epsilon \sum_{j=1}^{N} v_i p_i(t). \quad (5)$$

ここで $\Theta(t)$ は同期しているネットワーク全体の位相を表す変数で，集団位相と呼ぶ．定義方法は後述する．v_i は，個々の振動子に対する入力が全体に与える影響の大きさを表している．そこで v_i を振動子 i の**影響度**と呼ぶ．

式 (5) の導出方法を説明する．ϵ が十分小さいことを仮定し，(4) を同相同期解のまわりで線形化する．$\phi_i = \omega t + x_i$ とおき，x_i について線形化すると

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = -L\boldsymbol{x}(t) + \epsilon \boldsymbol{p}(t) \quad (6)$$

を得る．ここで $\boldsymbol{x} = (x_1 \ \cdots \ x_N)^\top, \boldsymbol{p} = (p_1 \cdots p_N)^\top$ である．L はヤコビアンで $L_{ij} = (1 - \delta_{ij})A_{ij}h'(0) + \delta_{ij}\sum_{j=1}^{N} A_{ij}h'(0)$ である．$h'(0) = -1$ としたので，$L = D - A$ と書ける．ここで D は対角成分に各ノード i の被リンク数を並べた行列であり，**ラプラシアン**とも呼ばれる．以下，L が対角化可能であることを仮定する．

L の形式から明らかなとおり，行和は常に 0 であるので，$\boldsymbol{u} = (1 \cdots 1)^\top$ に対して，$L\boldsymbol{u} = 0$ である．つまり，固有値 $\lambda_1 = 0$ が常に存在し，$\boldsymbol{u}$ は対応する右固有ベクトル（右ゼロ固有ベクトルと呼ぶ）である．この固有ベクトルは，集団の全体の位相をある定数だけシフトさせることに対応し，この摂動に対して系は中立の安定性（$\lambda_1 = 0$）を持つ．$\boldsymbol{v}L = 0$ を満たす $\boldsymbol{v}$（行ベクトル）を左ゼロ固有ベクトルと呼ぶ．同相状態の安定性の過程から，残りの $N-1$ 個の固有値はすべて正となる（$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_N$）．固有値 λ_l に対応する右固有ベクトルを $\boldsymbol{v}^{(l)}$ とし，$\boldsymbol{v}^{(l)}\boldsymbol{u}^{(l)} = 1$ と規格化する．便利のためゼロ固有ベクトルもこの定義に含めておく（$\boldsymbol{u}^{(1)} = \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}^{(1)} = \boldsymbol{v}$）．異なる固有値に対応する左右の固有ベクトルは直交することに注意する（$\boldsymbol{v}_l \boldsymbol{u}_{l'} = \delta_{ll'}$）．

次に

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1(t)\boldsymbol{u} + \sum_{l=2}^{N} c_l(t)\boldsymbol{u}^{(l)} \quad (7)$$

と展開する．ここで，$c_l(t) = \boldsymbol{v}^{(l)}\boldsymbol{x}(t)$ $(1 \le l \le N)$ であるので，この両辺を微分すると

$$\dot{c}_l = \boldsymbol{v}^{(l)}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}^{(l)}\{-L\boldsymbol{x} + \epsilon\boldsymbol{p}\} = -\lambda_l c_l + \epsilon \boldsymbol{v}^{(l)}\boldsymbol{p} \quad (8)$$

を得る．この式より，$c_l(t)$ $(l \ge 2)$ は $-\lambda_l c_l$ の効

果で 0 の周りで束縛されているが，一方，$c_1(t)$ に関してはそのような束縛がなく，摂動によって自由に発展する．したがって，$\boldsymbol{x}(t)$ の長時間の挙動は $c_1(t)\boldsymbol{u}$ に支配される．つまり，$\boldsymbol{x}(t) \approx c_1(t)\boldsymbol{u}$，あるいは，$\phi_i = \omega t + x_i$ より，$\phi_i(t) \approx \omega t + c_1(t)$ である．我々が知りたいのは，多くの場合，系の長時間の挙動であり，$c_1(t)$ のみに着目すればいい．

ここで集団位相を $\Theta(t) = \omega t + c_1(t)$ と定義する．これを集団位相と呼ぶのは，どの位相 $\phi_i(t)$ の長時間挙動も $\Theta(t)$ で近似されるからである．この定義から (5) が従う．あるいは，$\Theta = \sum_{i=1}^{N} v_i\phi_i$ を定義としてもよい．$\phi_i = \omega t + x_i$ を代入して，両辺微分することにより (5) を得る．集団位相は ϕ_i の単純な平均値ではなく，v_i によって重み付けされた平均位相である．

6. 影響度の例

式 (5) より，左ゼロ固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ の第 i 成分 v_i が，振動子 i の全体に対する影響力を表していることがわかる．$\boldsymbol{v}$ の例を 3 つ挙げる．

まず，隣接行列 A が対称の場合を考える．つまり，どの 2 つの振動子間でもバランスした相互作用をしている場合で，通常の格子系などの多くの物理系がこれに含まれる．このときラプラシアンも対称行列なので，右と左のゼロ固有ベクトルは比例する．今，$\boldsymbol{u} = (1\ \cdots\ 1)^{\mathsf{T}}$ と取っているので，規格化条件 $\boldsymbol{vu} = 1$ より，$v_i = 1/N\ (1 \le i \le N)$ となる．つまり，どの振動子も同一の重要度 $1/N$ を持つ．この意味で，隣接行列が対称の場合は民主的であると言える．

隣接行列が非対称だと，影響度は非自明となる．まず図 2 (a) の簡単なネットワークを考える．2 つの振動子が非対称な力で影響し合っている．このネットワークの隣接行列とラプラシアンは

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -\kappa & \kappa \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

である．$\boldsymbol{v}L = 0$ なる $\boldsymbol{v}$ を規格化すれば影響力が求まる．答えは $\boldsymbol{v} = (1\ \kappa)/(1+\kappa)$ となり，影響力は相手に及ぼす結合の大きさに比例していることがわかる．

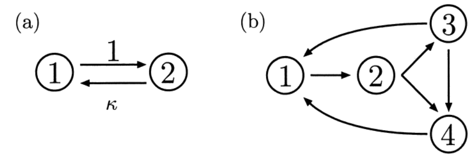


図 2　ネットワークの例．

図 2 (a) では $\kappa = 0$ のときは，振動子 1 が影響力を独占する．振動子の数が多いときでも，ネットワーク中に結合を受けない振動子が 1 つ存在すると，その振動子が影響力を独占する．このようなネットワークは，対称行列の場合と対照的で，独裁的なネットワークと言える．

次に図 2 (b) を考えよう．ここでは，結合の大きさは矢印があれば 1，なければ 0 とする．ネットワークの構造から，どの振動子が最も影響力が大きいかを推測してみよう．まず，振動子 2 か 3 が怪しい．というのも，この 2 つの振動子は，意見を聞く相手が 1 人だけなのに対し，意見を言う相手は 2 人いる．一方，振動子 1 と 4 は，意見を聞く相手のほうが多い．つまり，振動子 2 と 3 は，相対的に自分勝手である．さて，振動子 2 と 3 のどちらがより強いか，以下を読み進める前に是非推測していただきたい．家族や研究室の人間関係（例えば，1：父，2：犬，3：母，4：娘）などを当てはめて考えるとまた面白い．

L を書き下すと，$\boldsymbol{v} = (2\ 4\ 3\ 1)/10$ が左ゼロ固有ベクトルとなっていることを確認できる*1)．したがって，一番影響力が強いのは振動子 2 である．振動子 4 に比べると 4 倍も影響力が大きいことがわかる．振動子 2 が 3 より優位なのは，直感的に言うと，2 が比較的影響力の強い 3 に対して直接意見を言っているからである．一方振動子 3 は弱い振動子に意見するので，全体に影響が及びづらい．この直感的な議論は数学的には以下のように裏付けされる．要素が 1 と 0 で表された隣接行列に対するラプラシアンの左ゼロ固有ベクトルの第 i 要素は，ノード i から始まる**全域木**（spanning tree）の総数に対応する（matrix tree 定理）[8]．全

*1)　左ゼロ固有ベクトルの便利な計算方法が文献 8) にある．

域木とは，あるノード（根と呼ぶ）から，すべてのノードに到達する経路網で，ツリー構造（つまり，各ノードを尋ねる回数が1回のみ）のものである．ノード1からは，1から2，2から3と4という経路と，1から2，2から3，3から4という経路の2つ全域木が存在する．同様に数え上げると，ノード2からは4つ，3からは3つ，4からは1つある．あるノードから意見が拡散するとき，全域木の数が多いほうがいろいろな経路で拡散し，他のノードにより強い影響を与えることができる．

影響度は振動子ネットワーク以外にも様々な問題で現れる．例えば，生態系における固定確率も関係するなど，いくつかの例が文献8)で紹介されている．また，スモールワールド・ネットワークといったいくつかのネットワークにおける影響度の計算やネットワークでのペースメーカーによる同期現象との関係性は文献9)に，階層的なネットワーク構造における影響度の計算やPageRankと呼ばれるWEBページのランキングと影響度の関係については文献10)で議論されている．

7. ゆらぎとネットワーク構造

最後に，振動ダイナミクスのゆらぎとネットワーク構造の関係についての研究を紹介する[7,11]．振動ダイナミクスは，熱ノイズや生化学反応の確率性に起因するノイズなどの各種のノイズにさらされている．しかし，心臓の拍動にしろ，概日リズムにしろ，生物リズムでは極めて正確なリズムが刻まれている．心筋細胞の実験で，分離した細胞の示す振動と，細胞間の相互作用がある状態での振動では，後者のほうがゆらぎが小さいことがよく知られており，**時間的正確性の協同的増大**として古くから興味を持たれている現象である[12]．

ゆらぎの減衰とネットワークを介した相互作用との関係は，ミクロ・マクロリンクの視点から定式化ができる．各振動子のゆらぎを表現する単純な方法は，(4) の外力項をノイズとすることである．つまり，$\epsilon p_i(t) = \sqrt{D}\xi_i(t)$ とし，D はノイズの強度，$\xi_i(t)$ は平均0，分散1の白色あるいは有色のガウスノイズであるとする．以後一般性を失わずに $D = 1$ とする．

$\xi_i(t)$ はガウスノイズなので，(5) は

$$\frac{d\Theta}{dt} = \omega + \sigma\xi(t), \quad \sigma^2 = \sum_{j=1}^{N} v_j^2 \qquad (10)$$

と統計的に等しい．ここで $\xi(t)$ は $\xi_i(t)$ と同じ統計的性質を持つノイズである．各振動子 $\phi_i(t)$ の長時間挙動は $\Theta(t)$ と近似的に等しいので，σ は各振動子の持つ実効的なノイズ強度となる．σ は左ゼロ固有ベクトルの L_2 ノルムである．

σ の例をいくつか示そう．まず，隣接行列 A が対称行列（民主的ネットワーク）であるとする．このときは第6節で説明したとおり，$v_i = 1/N$ $(1 \leq i \leq N)$ なので，$\sigma = 1/\sqrt{N}$ となる．つまり，実効的なノイズ強度は中心極限定理と同様の減衰則を示す．民主的だと，各ノードは結合する相手と自分のちょうど中間の速度を取るので，結果としてノイズが公平に平均化され，中心極限定理と同じ性質が表れる．

隣接行列 A が非対称行列のときは，σ はネットワーク構造の詳細に依存するが，$\sum_{j=1}^{N} v_j = 1$ を使うと $\sigma \geq 1/\sqrt{N}$ を示せる．つまり，ノイズを減衰させるならば，対称行列が最適である．さらに，A_{ij} が0か正の値を取る状況に限定すると，$v_i > 0$ $(1 \leq i \leq N)$ が示せ，これを使うと $\sigma \leq 1$ を示せる．$v_i = 1$ となるのは独裁的ネットワーク（他から結合を受けないノードが存在するネットワーク）のときである．独裁的だと，周りの意見は無視されるので，独裁者のゆらぎに全体が振られ，実効的ノイズ強度は単一の振動子と同じとなる．

有向スケールフリー・ネットワークでは特殊な N 依存性が現れる．ノード i の被結合数 k_i が分布 $P(k) \propto k^{-\beta}$ に従うとする．このとき，$\boldsymbol{v}$ を近似的に見積もることにより，次の依存性を導出できる[7]．

$$\sigma \propto \begin{cases} 1 & (\gamma < 2), \\ N^{-1+(\gamma-1)^{-1}} & (2 < \gamma < 3), \\ N^{-1/2} & (\gamma > 3). \end{cases} \qquad (11)$$

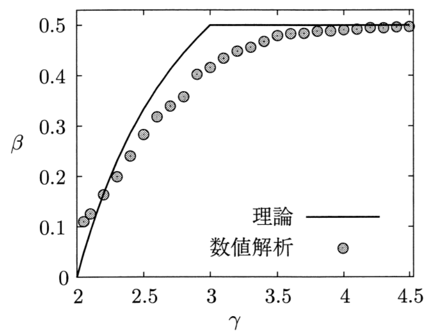


図 3 有向スケールフリーネットワークにおける σ の N 依存性（$\sigma \propto N^{-\beta}$）.

つまり，$\gamma < 2$ の場合は独裁的なネットワークと，$\gamma > 3$ の場合は民主的ネットワークと同じ N 依存性を示し，そしてその中間の γ の値では，非自明な指数を持つことがわかる.

式 (11) を数値的に検証した結果が図 3 である．実線が理論式 (11) である．数値的結果（◎記号）は，様々なサイズのスケールフリーネットワークに対して数値的に $\boldsymbol{v}$ を計算し，$\sigma \propto N^{-\beta}$ にフィットさせて得た β である．定性的によい結果が得られている.

最後に，σ と振動周期のゆらぎとの関係について注意する．集団位相は，系の長時間の挙動を正しく表現するが，振動周期は一般には短時間の挙動によって決まる量である．振動周期のゆらぎを正しく取り扱うためには，第 5 節で無視した $l \geq 2$ のモードの効果も考える必要がある．文献 11) ではその解析を行った．結果だけ簡単に説明すると，振動周期のゆらぎ（周期の標準偏差）の減衰は振動子の数が少ないときは σ に従う．しかし，振動子数が多いと減衰が頭打ちとなる.

8. おわりに

生命システムに代表される非平衡開放系で現れる振動現象の特徴は，リミットサイクルによって表現される振動軌道の安定性と，振動子ネットワークで現れる同期現象である．様々な数理モデルでこれらを例示することができるが，本解説では概日リズムのモデルを用いて紹介した．また，振動子ネットワークの一般的性質を調べるために有用な位相振動子モデルについても簡単に解説した．そして，位相振動子モデルの応用例として，ミクロ・マクロリンクに関する最近の研究を紹介した．本解説を通して，非平衡開放系に特有の現象や問題と，その解析方法に少しでも親しんでいただければ幸いである.

最後に，この原稿のチェックをしていただいた増田直紀さんと泉田勇輝さんにこの場を借りて御礼申し上げます.

参考文献

1) M.A. Lema, D.A. Golombek, and J. Echave. Delay model of the circadian pacemaker. *Journal of theoretical biology*, Vol.**204**, No.4, pp.565–573, 2000.
2) 郡宏，森田善久．『生物リズムと力学系』．共立出版，2011.
3) 巌佐庸．『生命の数理』．共立出版，2008.
4) 蔵本由紀, 河村洋史．『同期現象の数理』．培風館, 2010.
5) Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer, New York, 1984.
6) 郡宏，蔵本由紀．「連載：ネットワーク科学最前線—世界の“つながり”を知る科学と思考 (2)『複雑ネットワークと非線形科学』」．数理科学, Vol.**521**, pp.62–69, 2006（青山秀明，相馬亘，藤原義久編著．『ネットワーク科学への招待』（SGC ライブラリ–65），pp.10–17 に再録）.
7) N. Masuda, Y. Kawamura, and H. Kori. Collective fluctuations in networks of noisy components. *New Journal of Physics*, Vol.**12**, p.093007, 2010.
8) H. Kori, Y. Kawamura, H. Nakao, K. Arai, and Y. Kuramoto. Collective-phase description of coupled oscillators with general network structure. *Physical Review E*, Vol.**80**, p.036207, Jan 2009.
9) N. Masuda, Y. Kawamura, and H. Kori. Analysis of relative influence of nodes in directed networks. *Physical Review E*, Vol.**80**, No.4, p.46114, 2009.
10) N. Masuda, Y. Kawamura, and H. Kori. Impact of hierarchical modular structure on ranking of individual nodes in directed networks. *New J. Phys.*, Vol.**11**, p.113002, 2009.
11) H. Kori, Y. Kawamura, and N. Masuda. Structure of cell networks critically determines oscillation regularity. *Journal of Theoretical Biology*, Vol.**297**, pp.61–72, 2012.
12) A.T. Winfree. *The Geometry of Biological Time*. Springer, New York, 2nd edition, 2001.

（こおり・ひろし，
お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科）

1次元量子系と振動



工藤 和恵

1. 1次元量子系

金属などの固体では，原子が規則正しく並び結晶格子を構成している．金属中の電子は，結晶格子によって散乱されるため，自由電子とは異なるダイナミクスを示すことになる．ここでは，1次元の場合に話を絞ることにしよう．つまり，原子が1次元状に並び格子を組んでいて，その1次元格子中を伝導電子が動ける状態を考える．もっと一般的に言えば，1次元の**空間周期的**なポテンシャル中に，量子的な粒子が存在する系を考える．このような系を，**1次元量子系**と呼ぶ．

1次元量子系は，厳密解が計算できる場合もあり，理論的研究は以前から発達していた．一方で，1次元物質の実験は難しく，実験的検証はあまり進んでいなかった．そのため1次元量子系は，長い間トイモデル（おもちゃのような模型）として扱われてきた．しかしながら，冷却原子の実験が近年可能になり，状況は変わってきた．光格子中の冷却原子の実験で，1次元量子系を実現できるようになったためである．しかも，実験条件を変えることで，相互作用の強さを調節することができる．理論的研究の実験検証をする上で，この点は非常に有利な点である．これから紹介する現象も，理論だけでなく，近年の実験によって確認されたものである．

本稿では，1次元量子系で見られる振動現象を2つ紹介する．一つは，その存在が古くから理論的に予言されていた**ブロッホ振動**，もう一つは，光格子中の冷却原子の実験で発見された**スーパーブロッホ振動**である．どちらも，系の**空間周期性**がカギとなって起こる現象である．

2. ブロッホ振動

まずイメージをつかむために，図1(a)のような1次元結晶格子中の電子を考えよう．ここに一様な定常電場を加えると，電子の感じるポテンシャルは図1(b), (c)のように傾く．このとき何が起こるだろうか？ 古典系ならば図1(b)のように転がり落ちるのが自然かもしれない．しかし，量子系ではそうならず，図1(c)のように電子が振動運動する．それがブロッホ振動と呼ばれる現象である．

結晶格子中の電子の波動関数を記述するのに欠かせない**ブロッホの定理**（Bloch's theorem）は，固体物理を学んだ人なら誰もが知っているだろう．

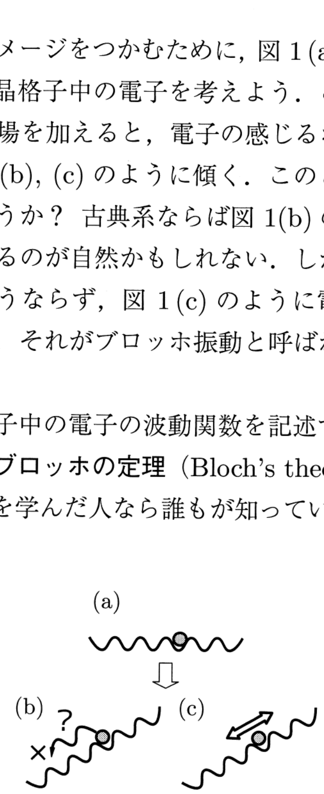


図1 (a) 1次元結晶格子中の電子．ここに定常電場を加えて傾けると，(b) 転がり落ちるのか？ 実は，そうならず，(c) 振動運動する．

ブロッホの定理によると，周期的ポテンシャルに対する固有関数は，そのポテンシャルと同じ周期を持つ関数と平面波との積の形で表される[1)]．また，その空間周期性のために，電子の取り得るエネルギーは，**エネルギーバンド**と呼ばれる領域内に制限される．

それをふまえて，まず半古典論的にブロッホ振動を説明しよう．次のような形のエネルギーバンドを持つ1次元量子系を考える．

$$E(k) = -J\cos(kd). \tag{1}$$

この形のエネルギーバンドを持つ模型は，格子定数 d を持つ1次元格子系で，隣り合うサイト間に強さ J の相互作用があって粒子が飛び移れるものに相当する[*1)]．式(1)は，その1粒子に対するエネルギー分散[*2)]である．ここで考える粒子は，電子と限定せず，量子的な粒子であるとする．これが，一様な定常外場から F_0 という力を受けているとき，運動方程式は

$$\hbar\frac{dk}{dt} = F_0 \tag{2}$$

と書ける．初期条件を $t=0$ で $k=k_0$ として方程式を解くと，次式が得られる．

$$k(t) = k_0 + \frac{F_0 t}{\hbar}. \tag{3}$$

群速度 v_g は，エネルギー $E(k)$ の k 微分で与えられるので，式(1), (3)から次のように計算できる．

$$v_g = \frac{1}{\hbar}\frac{dE(k)}{dk} = \frac{Jd}{\hbar}\sin(k_0 d + \omega_{\mathrm{B}} t). \tag{4}$$

ここで，$\omega_{\mathrm{B}} = F_0 d/\hbar$ は**ブロッホ振動数**と呼ばれる．式(4)を時間で積分すれば，粒子の位置 x が，次のように与えられる．

$$x(t) = -\frac{J}{F_0}\left[\cos(k_0 d + \omega_{\mathrm{B}} t) - \cos k_0 d\right]. \tag{5}$$

ここで，初期条件は $t=0$ で $x=0$ とした．式(5)より，粒子は実空間で振幅 J/F_0 で振動数 ω_{B} の振動運動をすることが分かる．

*1） 具体的には，タイト・バインディング模型，量子ハイゼンベルク模型，ハバード模型などがそれに対応する．

*2） エネルギー E と波数 k の関係をエネルギー分散関係という．

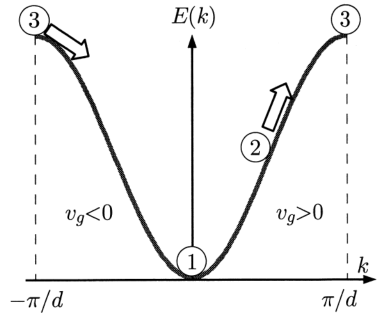


図2 式(1)で表されるエネルギーバンド．ブロッホ振動の直観的な説明．

もう少し直観的に説明してみよう．式(1)で表されるエネルギーバンドを，図2に示した．ただし，$E(k)=0$ の位置は適当にずらしてある．$k_0=0$ とすると，はじめの粒子の状態は①にある．式(3)にしたがって時間発展すると，粒子は②を経て $k=\pi/d$ の③に到着する．この間，$dE/dk>0$ なので，群速度は正の値をとる（$v_g>0$）．$k=\pi/d$ はブリルアン・ゾーン[*3)]の端なので，③の状態はもう一つの端 $k=-\pi/d$ の状態と同等である．ここから再び①の状態に向かう．この間は $dE/dk<0$ なので，$v_g<0$ である．こうして同様のことを繰り返すため，v_g は周期的に符号を変える．そのため粒子の位置も振動することになる．

ブロッホ振動は，はじめは上で説明したような半古典論的な議論で理論的に考察された[2)]．しかし実験的な観察は難しく，長い間直接的な観察ができなかった．ようやく観察されたのは半世紀以上経ってからで，半導体超格子の実験[3)]や光格子を利用した実験[4)]で実現された．

3. スーパーブロッホ振動

スーパーブロッホ振動は，光格子中の冷却原子の実験で初めて見出された現象であり[5)]，ブロッホ振動と比較すると非常に歴史が浅い．もちろん「スーパーブロッホ振動」という名前は，ブロッホ振動にちなんで付けられたものである．この現象

*3） 波数空間での基本単位格子のこと．つまり，ブリルアン・ゾーンの外にも，これと同じ構造が広がっている．

はブロッホ振動と似た枠組みで説明できるが，生じる状況や振動の振幅，振動数は大きく異なる．ブロッホ振動と比較すると，スーパーブロッホ振動は非常に大きな振幅を持った長周期の振動である．名前に「スーパー」が付けられたのは，そうした理由からだろう．

3.1 スーパーブロッホ振動の起きる条件

スーパーブロッホ振動は，簡単に言うと，ブロッホ振動を起こす系に**時間周期的**な外場を加えた場合に起きる．ただし，いくつか条件がある．これから単純な模型を用いて，それを説明していく．まず前節で与えた式 (1) の形のエネルギーバンドを持つ系を考える．ここで粒子は，定常な外場だけでなく，交流電場のような時間周期的に変化する一様な振動外場からも力を受けていると考える．すなわち，粒子の受ける力は

$$f(t) = F_0 + F\sin(\omega t + \phi) \tag{6}$$

で与えられるとする．ここで，F は振動外場の振幅，ω は振動数，ϕ は初期位相である．定常外場を加えた時点では，ブロッホ振動は起きても，粒子が隣のサイトに自由に飛び移ることは一般的にはできなくなる．すなわち，外場を加えていないときは図 3 (a) のようにすべての格子点が同じポテンシャルのレベルにあるが，定常外場を加えると図 3 (b) のように隣接サイト間にポテンシャル差 F_0d ができる．しかし，**共鳴条件**

$$F_0d = n\hbar\omega \quad (n \text{ は整数}) \tag{7}$$

を満たすような振動数の振動外場を加えると，粒子は隣接サイト間のポテンシャル差を補填するだけのエネルギーを振動外場からもらって，隣に飛び移れるようになる．スーパーブロッホ振動は，この条件から少しだけずらした振動数の外場を加えたとき，すなわち次の条件を満たすように振動数を設定したときに起こすことができる．

$$F_0d = (n+\delta)\hbar\omega. \tag{8}$$

ここで，$\delta \ll 1$ とする．

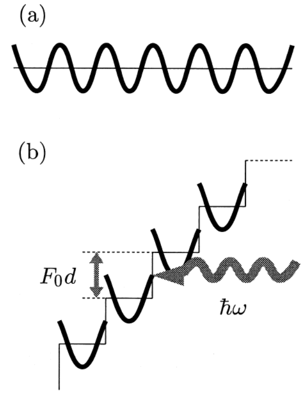


図 3 (a) 外場が加わっていないとき．(b) 定常外場と振動外場が加わったとき．

3.2 フロケの定理

式 (8) の条件下で具体的な計算をする前に，式 (7) の条件下で準備をしておこう．以下の議論で重要なポイントとなるのが，**フロケの定理** (Floquet's theorem) である．これは，ブロッホの定理の空間周期性を時間周期性に置き換えたものである．すなわち，ハミルトニアンが周期 $T = 2\pi/\omega$ の時間周期性を持つ場合，時間依存シュレディンガー方程式の解は，**フロケ状態**

$$\psi_k(t) = \exp\left[-\frac{i\epsilon(k)t}{\hbar}\right]u_k(t) \tag{9}$$

を用いて表すことができる．ここで，$\epsilon(k)$ は**擬エネルギー** (quasienergy) と呼ばれる．また，$u_k(t) = u_k(t+T)$ である．

いま考えている系は，振動外場による時間周期性を持つので，フロケの定理が適用できる．まず，式 (1) をエネルギー固有値として持つハミルトニアンを H_0 とすると，時間に依存しないシュレディンガー方程式は次のように書ける．

$$H_0\varphi_k = E(k)\varphi_k. \tag{10}$$

ここで，φ_k は $E(k)$ に対応する固有状態である．次に，時間変化する波数 $q_k(t)$ を導入する．粒子の運動量が外場から力 $f(t)$ を受けて変化することを考慮して，次のように定義する．

$$q_k(t) = k + \frac{1}{\hbar}\int_0^t f(\tau)d\tau. \tag{11}$$

それぞれの k に対する時間依存シュレディンガー方程式は，位置の演算子 $\hat{x}$ を用いて

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi_k(t)=[H_0-f(t)\hat{x}]\psi_k(t) \tag{12}$$

と書ける．この方程式の解は，式 (11) を用いて次のように表せる．

$$\psi_k(t)=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E(q_k(\tau))\,d\tau\right]\varphi_{q_k(t)}. \tag{13}$$

これが解になることは，$\varphi_{q_k(t)}$ を平面波で展開し，式 (12) に式 (13) を代入して，式 (1), (11) を利用すれば確認できる．ここでフロケの定理を思い出すと，式 (13) はフロケ状態になっているはずである．つまり，時間周期的な関数と，そうでない部分を含む指数関数の積の形に書けるはずである．

式 (13) から，式 (9) の $\epsilon(k)$ と $u_k(t)$ に対応する式を求めよう．まず式 (9) を見ると，$\epsilon(k)$ は指数関数の中で時間に比例する項の係数に対応している．それをふまえて式 (13) より，擬エネルギーを

$$\epsilon(k)=\frac{1}{T}\int_0^T E(q_k(t))\,dt \tag{14}$$

と定義すると，$u_k(t)$ が次の式で与えられる．

$$\begin{aligned} u_k(t) \;=\; \exp\Bigg[&-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E(q_k(\tau))\,d\tau \\ &+\frac{i}{\hbar}\epsilon(k)t\Bigg]\varphi_{q_k(t)}. \end{aligned} \tag{15}$$

この式は，式 (7) の条件の下で，時間周期的つまり $u(t)=u(t+T)$ になっている．

式 (14) で定義された擬エネルギーから，振動外場の 1 周期あたりの平均群速度 $\bar{v}_g$ は次のように与えられる．

$$\bar{v}_g=\frac{1}{\hbar}\frac{d\epsilon(k)}{dk}. \tag{16}$$

つまり，擬エネルギーを求めれば平均群速度が分かるため，そこからスーパーブロッホ振動の振動数や振幅を求めることができる．

3.3 スーパーブロッホ振動の理論解析

ここまでで一通りの準備はできたので，具体的に $q_k(t)$ および $\epsilon(k)$ を計算し，平均群速度を求めよう．式 (11) に式 (6) を代入して計算すると

$$\begin{aligned} q_k(t) \;&=\; k+\frac{1}{\hbar}\int_0^t [F_0+F\sin(\omega\tau+\phi)]\,d\tau \\ &= k+\frac{F_0}{\hbar}t-\frac{F}{\hbar\omega}[\cos(\omega t+\phi)-\cos\phi] \\ &= k+\frac{1}{d}[(n+\delta)\omega t+F_\omega\cos\phi \\ &\qquad -F_\omega\cos(\omega t+\phi)]. \end{aligned} \tag{17}$$

ここで，$F_\omega=Fd/(\hbar\omega)$ である．また，最後の変形で式 (8) を利用した．式 (17) を式 (14) に代入すると

$$\begin{aligned} \epsilon(k) \;&=\; \frac{1}{T}\int_0^T E(q_k(t))\,dt \\ &= -\frac{J}{T}\int_0^T \cos(q_k(t)d)\,dt \\ &= -\frac{J}{T}\int_0^T \cos[kd+\delta\omega t+F_\omega\cos\phi+n\omega t \\ &\qquad -F_\omega\cos(\omega t+\phi)]\,dt. \end{aligned} \tag{18}$$

ここで，一つ重要な仮定をする．$\delta \ll 1$ なので，$\delta\omega t$ は振動の 1 周期の積分中ではほぼ定数として扱えるとする．すると，$\delta\omega t$ は時間積分の外に出せるので

$$\epsilon(k)=-\frac{J}{2\pi}\int_\phi^{2\pi+\phi}\cos(a+n\tau-b\cos\tau)\,d\tau. \tag{19}$$

ただし

$$a \;=\; kd+\delta\omega t+F_\omega\cos\phi-n\phi, \tag{20}$$

$$b \;=\; F_\omega \tag{21}$$

となる．式 (19) の積分は，n 次のベッセル関数 $\mathcal{J}_n(x)$ を用いて次のように実行できる（ベッセル関数の形は図 4 参照）．

$$\begin{aligned} &\int_\phi^{2\pi+\phi}\cos(a+n\tau-b\cos\tau)\,d\tau \\ &= 2\pi\mathcal{J}_n(b)\cos\left(a-\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

したがって擬エネルギーは次のように表される．

$$\begin{aligned} \epsilon(k) \;=\; -J\mathcal{J}_n(F_\omega)\cos\Big[&kd+\delta\omega t+F_\omega\cos\phi \\ &-n\left(\phi+\frac{\pi}{2}\right)\Big]. \end{aligned} \tag{23}$$

式 (23) より $n=1$ の場合の群速度を計算す

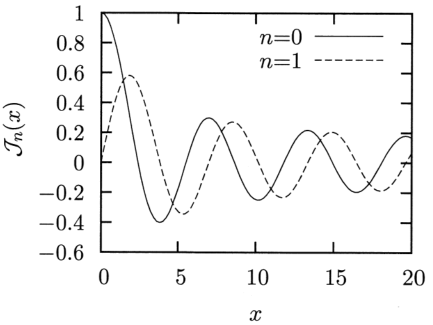


図 4　実線：0 次のベッセル関数 $\mathcal{J}_0(x)$．破線：1 次のベッセル関数 $\mathcal{J}_1(x)$．

ると，

$$\bar{v}_g = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial\epsilon(k)}{\partial k} = -\frac{Jd}{\hbar}\mathcal{J}_1(F_\omega)\cos(K_F+\delta\omega t). \quad (24)$$

ここで，$K_F = kd + F_\omega\cos\phi - \phi$ である．式 (24) を時間積分すると，スーパーブロッホ振動が実空間でどのように現れるかが分かる．初期条件を $t = 0$ で $x = 0$ とすると

$$x(t) = -\frac{Jd}{\delta\hbar\omega}\mathcal{J}_1(F_\omega) \times[\sin(K_F+\delta\omega t) - \sin K_F] \quad (25)$$

すなわち，スーパーブロッホ振動の振動数は $\delta\omega$ で与えられ，その振幅は $\delta\omega$ に反比例する．$\delta \ll 1$ なので，大きな振幅で非常にゆっくりとした振動をすることが分かる．文献 6) では，式 (25) と実験データを比較し，それらがよく一致していることが示されている．

3.4 初期位相の役割

ここで，振動外場の初期位相とスーパーブロッホ振動の位相について考察しておこう．式 (25) から分かるように，スーパーブロッホ振動には $K_F = kd + F_\omega\cos\phi - \phi$ という位相が含まれている．すなわち，振動外場の初期位相 ϕ に依存して位相シフトが現れる．そもそも，振動外場の振動が十分に速いことを仮定して結果を導出したのに，なぜ初期位相 ϕ は残したままでいいのかと疑問に思う読者もいるだろう．実は，類似の現象を理論解析したこれ以前の研究では，ϕ の効果を消すように処理するのが普通だった[7]．

少し話が脱線するが，定常外場は加えず ($F_0 = 0$) 振動外場のみを加えた場合の擬エネルギーを考えてみよう．時間周期的な外場が加えられた 1 次元量子系ということで，これまでの議論と同様にすれば擬エネルギーを求められる．すなわち，式 (23) で $n = \delta = 0$ と置けばよい．

$$\epsilon(k) = -J\mathcal{J}_0(F_\omega)\cos(kd + F_\omega\cos\phi). \quad (26)$$

このとき，振動外場の初期位相 ϕ の効果を消すのに最も自然な方法は，外場がゼロの極限で $\epsilon(k)$ が $E(k)$ と一致するよう，すなわち $F_\omega \to 0$ で $\epsilon(k) \to -J\cos(kd)$ となるように，かつ $k = 0$ で $\epsilon(k)$ が最低になるように ϕ をとることだろう．そのためには，$\phi = \pi/2$ とするのがよい．このような議論が，振動外場中での量子ダイナミクスに一般的に適用できるだろうと，スーパーブロッホ振動が発見されるまでは考えられていた．

しかしスーパーブロッホ振動の場合には，$\phi = \pi/2$ としたのでは，どうしても実験結果と矛盾する点があった．仮に $\phi = \pi/2$ であれば，式 (25) の K_F は F_ω に依存しないことになる．しかし，文献 5) の実験結果では，F_ω に依存した位相シフトが，はっきりと現れていたのである．つまり $\phi \neq \pi/2$ でなければ，この位相シフトを説明できないのである．スーパーブロッホ振動は，振動外場に比べて非常にゆっくりとした振動であるのにも関わらず，振動外場の初期位相の情報を捉えていたと言える．

3.5 波束のダイナミクス

以上の説明は，1 粒子に対する半古典的な議論だった．実際の量子系では，粒子の位置と運動量を同時に確定できないので，適度に広がった波束を考えなくてはならない．波束のダイナミクスを議論するには，本当はもう少し注意深く考察する必要がある．その点を指摘した文献 8) では，フロケ描像に基づいた詳細な計算が示されている．しかし，スーパーブロッホ振動の本質的なメカニズムは，以上の簡潔な議論で，波束の中心の動きを捉えたことになるので，十分に説明できている．

4. おわりに

本稿では，定常外場と系の空間周期性から誘発されるブロッホ振動と，さらに振動外場が加わり時間周期性も絡むことで実現するスーパーブロッホ振動について解説してきた．どちらも現象としては時間周期的な振動であるが，系の空間周期性が欠かせない要因になっているところがポイントである．

ここでは簡単のために，1次元量子系に1つの粒子が存在し，エネルギーバンドが式 (1) で表される1つのみである場合を考えてきた．1次元量子系の代表的な模型である量子ハイゼンベルク模型やハバード模型，あるいは現実の1次元物質では，粒子は1つとは限らないし，バンド構造も複雑になる．文献6) では，2粒子以上の場合のスーパーブロッホ振動を，ハバード模型を用いた数値計算で示している．複数のエネルギーバンドが関わる場合には，さらに興味深い振動現象が現れることだろう．

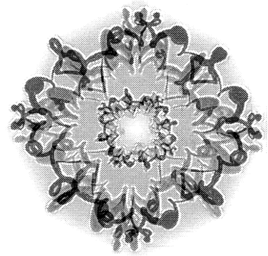
エネルギーバンドは，系の空間周期性に起因している．この空間周期性が，振動という時間周期的な現象を生み出している．その現象が一見不思議に見えるのは，エネルギーバンドが量子系に特有であり，単純な古典系では起こり得ないからである．1次元量子系は，このような量子系特有の現象をシンプルに理解するのに適している．これからも重要な研究対象として発展し，新しい発見がなされていくだろう．

参考文献

1) C. キッテル：『固体物理学入門』，丸善 (1998).
2) C. Zener: *Proc. R. Soc. London A* **145**, 523 (1934).
3) C. Waschke, H. Roskos, R. Schwedler, K. Leo, H. Kurz, and K. Köhler: *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3319 (1993).
4) M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon: *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4508 (1996).
5) E. Haller, R. Hart, M.J. Mark, J.G. Danzl, L. Reichsöllner, and H.-C. Nägerl: *Phys. Rev. Lett.* **104**, 200403 (2010).
6) K. Kudo and T.S. Monteiro: *Phys. Rev. A* **83**, 053627 (2011).
7) A. Eckardt, M. Holthaus, H. Lignier, A. Zenesini, D. Ciampini, O. Morsch, and E. Arimondo: *Phys. Rev. A* **79**, 013611 (2009).
8) S. Arlinghaus and M. Holthaus: *Phys. Rev. B* **84**, 054301 (2011).

（くどう・かずえ，お茶の水女子大学理学部）

ソリトンの共鳴



戸田　晃一

1. はじめに

ソリトンとは,

(1)　孤立波の性質
空間的に局在した波が，振幅・速さ・波形などの性質を変えずに伝搬する

(2)　粒子的な性質
孤立波は互いの衝突に対して安定であり，各々の個別性（特徴）を保持する

の 2 つの性質を合わせもつ非線形波動のことです[1]．ソリトンどうしが衝突（**相互作用**）しても，(衝突の瞬間を除けば）孤立波の個別性が壊れない，というのが非常に大きな特徴です．しかし，ある条件を満たすソリトンどうしによる衝突の前後で，通常の衝突とは異なる挙動が現れることがあります．それが，ここで取り扱う**ソリトンの共鳴**[8]とよばれる現象です[*1]．

サイエンス社の担当の方より，**ソリトンの共鳴**というテーマでの原稿の依頼を受けたときに戸惑いました．矢嶋信男氏[2]や渡辺慎介氏[3]の詳しい解説がすでにあり，私の力量ではこれらを越える解説を書くことは不可能であると思ったからです．ただ最近，児玉裕治氏（オハイオ州立大学）を中心とする研究グループによる，ソリトンの共鳴を含むより大きなクラスの厳密解の代数的な分類やそれらの挙動解析（実験による検証を含む）に関する研究[4]が盛んに行われ大きな広がりをみせつつあり，本号の特集中でソリトンの共鳴を紹介することは意味があることだと思い，執筆をお引き受けしました．

以下では，t, x, y を添え字とする場合には，その文字に関する偏微分を表します．例えば，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}$$

です．

2. ソリトンの挙動

ソリトンを解にもつ方程式のことをソリトン方程式とよびます．2 つの典型的かつ重要なソリトン方程式を例にして，上記で示したソリトンの性質を紹介します．

(1)　KdV ソリトン

(1 + 1) 次元ソリトン方程式の代表である，Korteweg-de Vries（KdV）方程式[5]：

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad u = u(t, x) \qquad (1)$$

を考えます．KdV 方程式 (1) は浅水波を記述する非線形分散型波動方程式であり，完全可積分系の方程式です．非線形性 (uu_x) と分散性 (u_{xxx}) がうまくつり合い，ソリトン（**KdV ソリトン**）は

*1)　文献によっては，ソリトンの**強い相互作用**とよばれることもあります．

生じます[*2)]．KdV 方程式 (1) の 1 個のソリトンの挙動を表す特殊解（**1-ソリトン解**）は，

$$\begin{cases} \tau_1 = 1 + e^{\eta_1}, \\ \eta_1 = p_1 x - \omega_1 t + \delta_1 & \text{(位相)}, \\ \omega_1 = p_1^3 & \text{(分散関係)} \end{cases}$$

とする

$$u = 2\left(\log \tau_1\right)_{xx} \tag{2}$$

で与えられます．ここで，δ_1 は任意定数です（以下，同様）．簡単な計算をすると，1-ソリトン解 (2) は

$$u = \frac{p_1^2}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\eta_1}{2}\right) \tag{3}$$

となることが分かります．解の表式 (3) をみれば明らかなように，1-ソリトンはただ一つのパラメータ p_1 だけでその特徴が決まっています（図 1）．ソリトンは振幅が大きいほど幅は狭くなり，伝搬は速くなります．

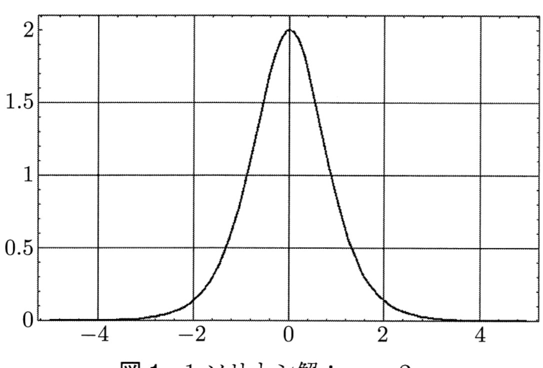


図 1　1-ソリトン解：$p_1 = 2$.

次に 2 個のソリトンの運動を表す特殊解（**2-ソリトン解**）を考えます．

$$\begin{cases} \tau_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2}, \\ \eta_i = p_i x - \omega_i t + \delta_i & \text{(位相)}, \\ \omega_i = p_i^3 & \text{(分散関係)}, \\ A_{12} = \left(\dfrac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^2 & \text{(相互作用係数)} \end{cases}$$

とする

$$u = 2\left(\log \tau_2\right)_{xx}$$

が 2-ソリトン解です．ここで，δ_i（$i = 1, 2$）は任意定数です（以下，同様）．2-ソリトン解は，2 つのパラメータ p_i（$i = 1, 2$）によりその特徴が決まります（図 2）．

それでは，右方向に向かって移動する 2 個のソリトンによるソリトンの衝突（相互作用）をみていきます．図 2 のソリトンの配置で説明します．左のソリトン（$p_1 = 2$）の方が振幅が大きいので速く進み，振幅の小さい（つまり遅い）ソリトン（$p_2 = 1$）に衝突し，振幅の小さい（つまり遅い）ソリトンを追い越す，という一連の相互作用の様子が図 2 から図 6 でみてとれます．衝突でソリトンはその波形などの特徴を変えない，つまり，ソリトンは相互作用によって壊れないという粒子的性質をもっていることがわかります．

(2)　KP ソリトン

次に，空間 2 次元の非線形分散型波動方程式である，Kadomtsev-Petviashvili（KP）方程式[6)]：

$$\left(u_t + 6uu_x + u_{xxx}\right)_x + \alpha u_{yy} = 0 \tag{4}$$

を考えます．ここで，$u = u(t, x, y)$, $\alpha = \pm 1$[*3)] です．この KP 方程式は，完全可積分な $(2+1)$ 次元ソリトン方程式として知られています．y 依存性を無視することで，KdV 方程式 (1) に帰着します．よって，KP 方程式 (4) は KdV 方程式 (1) の空間高次元版の一つとみなせます[*4)]．以下では，$\alpha = +1$（KP-II）の場合を考えます．

1-ソリトンの表式は

$$\begin{cases} \tau_1 = 1 + e^{\eta_1}, \\ \eta_1 = p_1 x + p_1 q_1 y - \omega_1 t + \delta_1 & \text{(位相)}, \\ \omega_1 = p_1(p_1^2 + q_1^2) & \text{(分散関係)} \end{cases}$$

とする

$$u = 2\left(\log \tau_1\right)_{xx}$$

*2)　$x \to \pm\infty$ のとき $u \to 0$ という境界条件は仮定します．

*3)　$\alpha = -1$ のとき KP-I，$\alpha = +1$ のとき KP-II とそれぞれよびます．

*4)　歴史的には，KdV 方程式の横方向の攪乱に対する安定性の議論の過程で KP 方程式は導出されました．

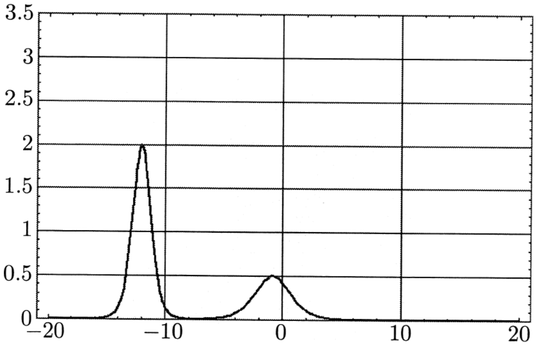


図 2　$p_1 = 2$ (左)，$p_2 = 1$ (右).

で与えられます．KP(-II) 方程式 (4) の 1-ソリトンの概形は図 7 のようになります．

KP 方程式 (4) がもつ (2+1) 次元ソリトン (**KP ソリトン**) は，2 次元空間 (x, y) に局在しているのではなく，ある一方向に広がっています．このようなソリトンを**ラインソリトン**とよびます[*5]．

同様にして，2-ソリトンの表式は

$$\begin{cases} \tau_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12} e^{\eta_1 + \eta_2}, \\ \eta_i = p_i x + p_i q_i y - \omega_i t + \delta_i, \\ \omega_i = p_i (p_i^2 + q_i^2), \\ A_{12} = \dfrac{3(p_1 - p_2)^2 - (q_1 - q_2)^2}{3(p_1 + p_2)^2 - (q_1 - q_2)^2} \end{cases}$$

とする

$$u = 2 (\log \tau_2)_{xx}$$

で与えられます．KP(-II) 方程式 (4) の 2-ソリトンの概形は図 8 のようになります．真上の方向からみた概形が図 9 です．相互作用の際の位相のずれは A_{12} に起因して起こります．ラインソリトンは位相のずれを除いて相互作用によって変化しないことが分かります．

（補足）

- ソリトンが 3 個以上の衝突においても同様の考察が可能です．
- KP ソリトンの位相を，

*5）　KP-II のラインソリトンは相互作用に対して安定で，KP-I のラインソリトンは相互作用に対して不安定であることが知られています[7]．

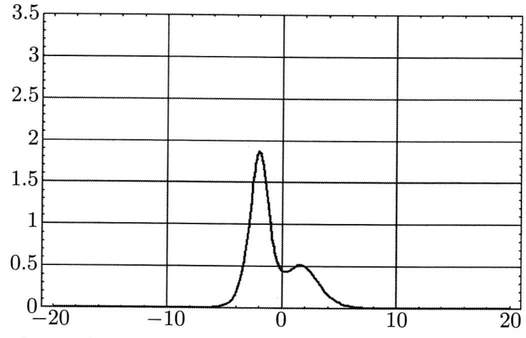


図 3　衝突初期：ソリトンどうしが重なり出す．

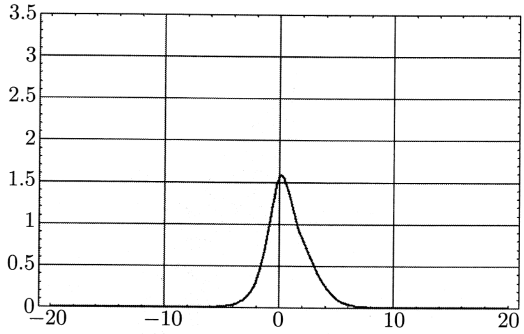


図 4　一つになったようにみえます．

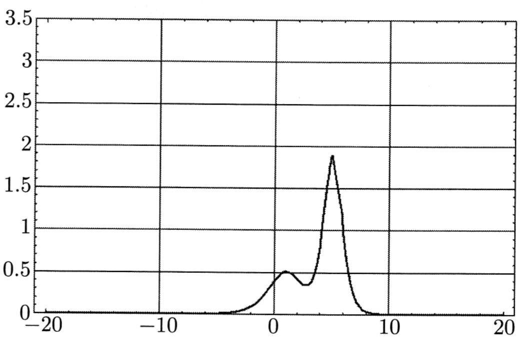


図 5　衝突後期：ソリトンどうしが分離し出す．

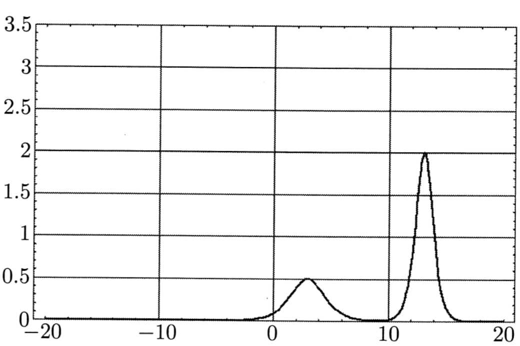


図 6　$p_2 = 1$ (左)，$p_1 = 2$ (右).

$$\eta_i = p_i x + p_i q_i y - \omega_i t + \delta_i$$

としましたが，

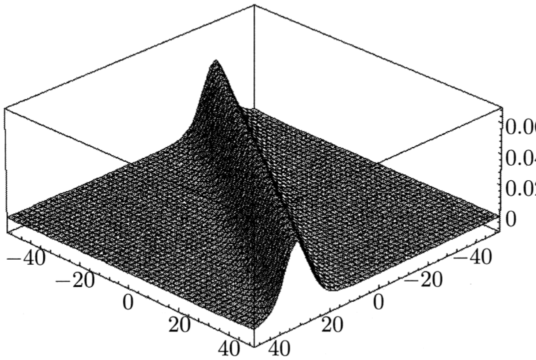


図 7　1-ソリトン解.

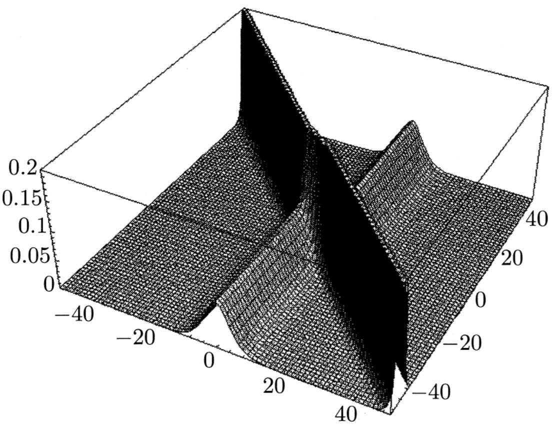


図 8　2-ソリトン解.

$$\eta_i = p_i x + r_i y - \omega_i t + \delta_i$$

という形で与えられることも多いです．どちらの場合でも，2 つのパラメータ（p_i と q_i，または p_i と r_i）によりソリトンの特徴が決まります．今回は，次の共鳴現象の挙動解析をみやすくするために前者の表式にしました．

ソリトンどうしの相互作用によって（位相のずれを除いて）その特徴を変えないことは，基本的なソリトンの性質です．ところが，ある条件の下でこの基本的な性質が破綻することがあります．それが，**ソリトンの共鳴**です．次に，KP ソリトンを用いてソリトンの共鳴[8)]を具体的に紹介します．

3. ソリトンの共鳴

$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，ソリトンの位相 η_i は

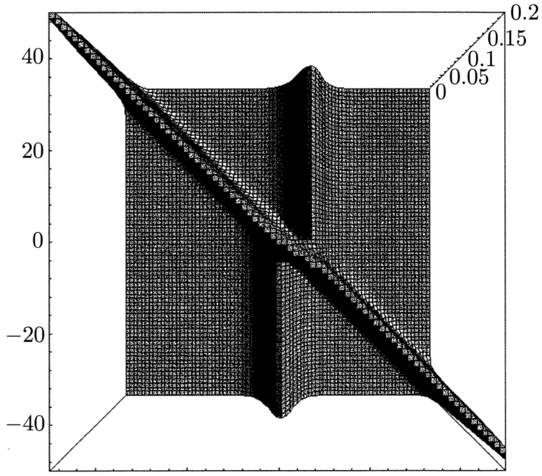


図 9　真上方向より：位相がずれています.

$$\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega(\boldsymbol{k}_i)t + \delta_i$$

とかくことができます．N 個のソリトン解（**N-ソリトン解**）が求められたとき，個々のソリトンはその波数ベクトル $\boldsymbol{k}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ で特徴づけられます．この N-ソリトン解というのは，それらが交差しているところでは波面（位相）に多少のずれは生じるものの，本質的には N 個のソリトンを重ね合わせたものと考えることができます．

2 個の波数ベクトル $\boldsymbol{k}_1$ および $\boldsymbol{k}_2$ により特徴づけられるソリトンを考えます．波数ベクトル $\boldsymbol{k}_i$ と周波数 $\omega(\boldsymbol{k}_i)$ の間に次の条件：

$$\omega(\boldsymbol{k}_2 \pm \boldsymbol{k}_1) = \omega(\boldsymbol{k}_2) \pm \omega(\boldsymbol{k}_1) \qquad (5)$$

が成立しているとします．このとき，新しい波数ベクトルとして

$$\boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{k}_2 \pm \boldsymbol{k}_1$$

を考えると，この $\boldsymbol{k}_3$ で特徴づけられる平面波もソリトンとして振る舞う可能性があります．つまり，2 個のソリトンの交差したところで $\boldsymbol{k}_3$ で特徴づけられる新たな第三のソリトンが発生することが期待されます．そして，この期待は正しく，このような現象を**ソリトンの共鳴**といいます．このときの条件 (5) を**共鳴条件**とよびます．実際に第三のソリトンが発生することを，KP(-II) 方程式

を例にとり考察しましょう．

位相 $\eta_i = p_i x + p_i q_i y - \omega_i t + \delta_i$ より，波数ベクトルは $\boldsymbol{k}_i = \begin{pmatrix} p_i \\ p_i q_i \end{pmatrix}$ となります．

- **共鳴条件 (5) 式の − 符号のとき**

$\boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_1$ より

$$p_3 = p_2 - p_1, \quad p_3 q_3 = p_2 q_2 - p_1 q_1. \quad (6)$$

また，$\omega_3 = \omega_2 - \omega_1$ より

$$\omega_3 = p_2(p_2^2 + q_2^2) - p_1(p_1^2 + q_1^2) \quad (7)$$

となります．そして，ω_3 および $\boldsymbol{k}_3$ が分散関係：

$$\omega_3 = p_3(p_3^2 + q_3^2) \quad (8)$$

を満たせば，ソリトンの共鳴が起こります．(7) と (8) より

$$p_3(p_3^2 + q_3^2) = p_2(p_2^2 + q_2^2) - p_1(p_1^2 + q_1^2)$$

となり，ここに (6) を代入することで，p_3, q_3 を消去すると

$$3(p_1 - p_2)^2 - (q_1 - q_2)^2 = 0 \quad (9)$$

を得ます．このとき，ソリトンの共鳴が起こっています（図 10）．

図 10 のソリトンの共鳴をもう少し詳しくみてみましょう．波数を共鳴条件 (9) を満足するように選ぶと，

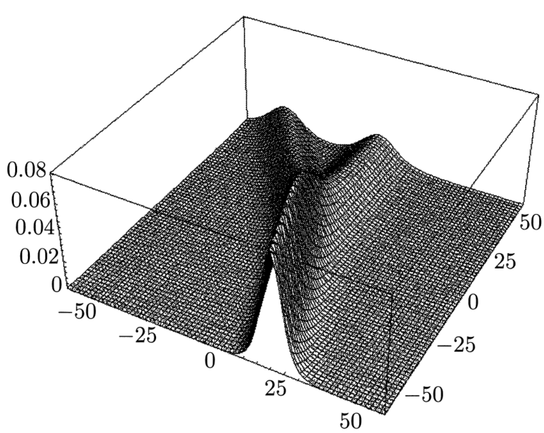


図 10 ソリトンの共鳴：第三のソリトンの形成．

$$A_{12} = 0$$

となり，2-ソリトン解は

$$\tau_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2}$$

となります．$p_i > 0$ と仮定すると，$x \to -\infty$ のとき，2-ソリトン解の主要部分は $\eta_1 =$ 定数，または $\eta_2 =$ 定数 のところにだけあり，その結果として

$$u = \frac{p_i^2}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\eta_i}{2}\right), \quad i = 1, 2.$$

すなわち，2 個のラインソリトンが存在します．一方，$x \to +\infty$ のときには，2-ソリトン解の主要部分は $\eta_2 - \eta_1 =$ 定数 のところにだけあり，ただ 1 個のラインソリトン：

$$u = \frac{p_3^2}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\eta_3}{2}\right)$$

がでてくることになります．ただし，

$$\eta_3 = \eta_2 - \eta_1, \quad p_3 = p_2 - p_1$$

です．よって，$x \to -\infty$ において 2 個のラインソリトンが共存し，$x \to +\infty$ においては新たな第三のソリトンのみが 1 個で存在している状態（三波共鳴の状態）となっており，図 10 の概形と一致します．

- **共鳴条件 (5) 式の ＋ 符号のとき**

同様に計算すると，共鳴条件 (5) は

$$3(p_1 + p_2)^2 - (q_1 - q_2)^2 = 0. \quad (10)$$

つまり

$$A_{12} = \infty$$

となります．このときも同様なソリトンの共鳴が起こります（詳細は省きます[3]）．

KP(-II) 方程式の共鳴条件 (9), (10) は，位相（波数ベクトル）のパラメータが満たす関係式なので，それぞれが特徴づけられるソリトンの伝搬方向と関連づけることができます[2]．

4. おわりに

ソリトンとは孤立波として安定に振る舞う，非常に性質の良いものです．しかし，そこはやはり非線形現象の一つです．少し条件を課すことで不思議な現象が出現します．ソリトンの共鳴がその一つです．

紙数の関係で以下の重要な話題に触れることができませんでした：

- KP ソリトンの共鳴と深く関連づけられる津波の Mach 反射[9]．
- 空間 1 次元におけるソリトンの共鳴[10]．
- KP 方程式以外の空間 2 次元におけるソリトンの共鳴およびその類似現象[11]．

これらについては，本稿で挙げてある参考文献を読んでください．

おまけ

本稿を書き上げる最終段階で，本稿の冒頭で触れた児玉氏の研究グループの主要メンバーの一人である，丸野健一氏（テキサス大学パンアメリカン校）から，2013 年 5 月下旬に，テキサス大学パンアメリカ校で，国際会議

Solitons in Two-Dimensional Water Waves and Applications to Tsunami

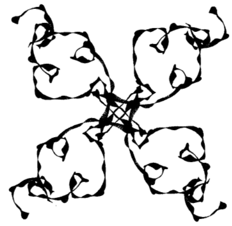
が開催予定[12]との連絡をうけました．この分野の最先端の研究成果に触れることができる会議だと思います．

参考文献

1) ソリトンについて勉強するなら，以下の書籍をお勧めします：
   - 戸田盛和：『非線形波動とソリトン』（新版），日本評論社 (2000).
   - 和達三樹：『非線形波動』（現代物理学叢書），岩波書店 (2000).
2) 矢嶋信男：「月刊フィジクス」，**6 (No.2)** (1985) 96.
3) 渡辺慎介：『ソリトン物理入門』，培風館 (1985).
4) 現在進行形の研究課題なので，参考文献は代表的なものを列挙しておきます：
   - S. Chakravarty and Y. Kodama: *Studies. in Appl. Math.* **123** (2009) 83.
   - Y. Kodama, M. Oikawa and H. Tsuji: *J. Phys. A* **42** (2009) 312001.
   - Y. Kodama: *J. Phys. A* **43** (2010) 434004.
   - W. Li, H. Yeh and Y. Kodama: *J. Fluid Mech.* **672** (2011) 326.
   - Y. Kodama and L.K. Williams: `arXiv:1106.0023`.
5) D.J. Korteweg and G. de Vries: *Phil. Mag.* **39** (1895) 4.
6) B.B. Kadomtsev and V.I. Petviashvili: *Sov. Phys. Dokl.*, **5** (1970) 539.
7) M.J. アブロビッツ（著），H. シーガー（著），薩摩順吉（訳），及川正行（訳）：『ソリトンと逆散乱変換』，日本評論社 (1991).
8) J.W. Miles: *J. Fluid Mech.* **79** (1977) 157; **79** (1977) 171.
9) M. Tanaka: *J. Fluid Mech.* **248** (1993) 637.
10) 以下の文献があります．
   - R. Hirota and M. Ito: *J. Phys. Soc. Jpn.*, **52** (1983) 744.
   - 広田良吾：別冊「数理科学」ソリトン (1985) 22.
11) 多くの文献があるので，ここではその一部のみ挙げておきます：
   - M. Tajiri and Y. Murakami: *Physics Letters A* **143** (1990) 217
   - S.-J. Yu, K. Toda, N. Sasa and T. Fukuyama: *J. Phys. A* **31** (1998) 3337.
   - H. Tsuji and M. Oikawa: *J. Phys. Soc. Jpn.* **76** (2007) 084401.
   - Y. Kodama and K.-I. Maruno: *J. Phys. A* **39** (2006) 4063.
12) 詳しい情報は http://faculty.utpa.edu/kmaruno/nsfcbms-tsunami.html で随時更新されています．

（とだ・こういち，富山県立大学工学部）

振動と場の量子論



風間　洋一

1.「ヒッグズ粒子」vs.「ヒッグズ場」

まだ読者の記憶にも新しいことと思いますが，2012年7月4日，CERN（欧州原子核研究機構）は，ついに素粒子の質量の起源に深く関わる「ヒッグズ粒子」と思われる新粒子を発見したと発表しました．この発見は素粒子論の長い歴史の中でも特筆すべき大きな意義を持つものであり，少なくとも ~1 TeV のエネルギーまでの物理[*1)]は「標準模型」と呼ばれる場の量子論の枠組みで正確に記述されることが確立したことになります．本稿はヒッグズ粒子の解説をするのが目的ではないので，詳しくは述べませんが，新聞やテレビの解説を見ていて感じたのは，一般読者・視聴者にとっては非常にわかりにくい粒子に見えたのではないかということでした．それはヒッグズ粒子が様々な粒子に質量を与えることを説明する部分に起因します．たとえば，ヒッグズ粒子は水飴のように他の粒子が運動するのを妨げ，その動きにくさこそが質量の生成を意味する，と言った説明がなされていましたが，これを文字通りとれば，ヒッグズ粒子は宇宙に充満しているのだが，今回やっと超高エネルギー加速器の実験でヒッグズ粒子自体を作り出しその痕跡を捕まえた，というわけのわからないことになってしまいます．そして，実はこのわかりにくさの根はかなり深いところにあり，根本的には，「粒子」がその背後にある「場」の振動の量子である，ということを一般人に説明することの難しさに起因するのです．そしてさらに，「場」にはそのような「粒子」として振る舞う振動部分の他に，振動せずに宇宙全体に「凝縮」（あるいは「充満」）している部分が原理的にはあり，ヒッグズ場にはまさしくそのような部分が存在して水飴のように他の粒子の運動を妨げている，ということを理解してもらうのは，もっと難しいと言えるでしょう．というわけで，「ヒッグズ粒子」ではなく，「ヒッグズ場」から始めない限り，ちゃんと筋の通った説明はできません．しかし無論それは新聞やテレビのレベルではなかなか難しいでしょう．

*1)　1 TeV は 10^{12} 電子ボルトの略であり，静止している陽子の持つ質量エネルギーの約 1000 倍のエネルギーを表します．このエネルギーで探査すると約 10^{-18} cm までの物理を調べることができます．

2. 電磁場と自然界の基本場

さて，そもそも「場」という概念は非常にわかりにくい概念です．我々が最初に「場」の概念に遭遇するのは，高校の物理で電磁場について習う時でしょう[*2)]．電荷間に力が働くことは，実験的に確かめることができますが[*3)]，それがその間にある「場」を媒介して起こるということは，式の

*2)　無論我々はそれ以前に重力という電磁気力と類似の遠隔力があることを知っているのですが，それを重力場による作用という形で習うのはうんと後のことになります．

*3)　電荷は目に見えませんが，それは質量が目に見えないのと実は同じなので，重力を測る実験と大差はありません．

上ではそう解釈することはできても，実感としてはわかりません．電磁場は電荷のように物体に付随していないので，もっと「見えない」感じがするのです．これが少し「見える」感じがするようになるのは，電磁場の振動として現れる電磁波について学び，光がその一つの形態であることを知るときでしょう．光は目に見えますし，その他の波長の電磁波も，そこに様々な情報を載せて通信に使うことができることから，見えないけれどもその存在を確信できるわけです．

しかし，もう一歩突っ込んで，それでは何が振動し波動として伝わっているのか，と問うと，また良くわからなくなります．光について言えば，この問はまさしく何百年もの間人類を悩ませた「エーテル」とは何か，という問題に他なりません．波動は何らかの「媒質」の振動エネルギーの伝播の形態である，というのは「常識」であり，エーテルの描像を念頭に置きながら構築したマックスウェルの電磁気理論が，結果的にエーテルを捨象した理論となり，エーテルなしに真空中を伝播する電磁波を予言したことは当時は恐ろしく不思議なことであったに違いありません．

では，現在この「不思議さ」が払拭されているかと言うと，感覚的には何も変わっていないと言うのが正直な答えでしょう．冒頭で触れた素粒子の「標準理論」には 37 個の場*4)（あるいはその振動のエネルギー量子としての粒子）が登場しますが，これらの場もすべて電磁場のように「真空」中を伝播できる基本的な場であり，特別な媒質を必要としません．従ってこれらもすべて依然として不思議な波動であるのですが，もう我々はこうした状況に慣れてしまっており，これが自然の原理であるとして受け入れている状況なわけです．

実はより正確には，そうした波動場の不思議さは，量子力学の発見以後さらに増したと言わなければなりません．電磁場のように古典的な波として観測できる場に加えて，電子や陽子など粒子として理解されていたものの背後にもやはり場が存在して，その場の波動のエネルギー量子が粒子として観測されているのだということが明らかになったからです．こうして，自然界のすべての基本的物質は（すくなくともあるエネルギーまでは）すべて場の量子論の枠組みで記述される，という統一的な描像が得られたのです．

*4) クォーク場とグルーオン場の持つ「色」の自由度も数えた場合の数．

3. 場の量子論の二つの顔

3.1 基本理論としての場の理論

というわけで，物理学を志す者は，物理学科の 4 年時かあるいは大学院の初年時になると，この基本理論としての場の量子論を学ぶことになります．そのほとんどは，素粒子論やその周辺の物理への適用を念頭において講じられますから，まず相対論の要であるローレンツ群について少し学んだ後，その分類に従って，まずはスカラー場，次にスピン 1/2 を持つディラック場，そしてスピン 1 を持つ電磁場，といった順に相対論的自由場の古典論をやるわけです．そしてその後，これらの自由場をフーリエ振動モードに分解し，各モードがそれぞれ調和振動子として振る舞うことを確かめた後，それを量子力学に従って量子化し，それをもう一度場のモード展開に戻してやることにより，量子化された場の理論ができあがる，ということになります．その後，ゲージ原理をはじめとする対称性を手がかりに適当な相互作用項を導入して，実際に自然界に実現している場の理論，すなわち「標準理論」，を構成し，相互作用が弱い領域に対しては，その効果を摂動論を用いて計算して，実際の実験結果と比較する，という段階に進みます．この際，量子力学に存在する根本的な揺らぎのために，幾つかの基本的な遷移振幅に無限大の寄与が現れますが，その寄与は実験で測られる粒子の質量や結合定数の中にすでに織り込み済みである*5)と考えて，有限な観測値で置き換えて

*5) すなわち，相互作用を取り入れる前の質量や結合定数が実は無限大になっていて，それと相互作用から生ずる無限大が打ち消しあって有限の結果が生じているのだと解釈するのです．

しまう，という「繰り込み」の考え方で処理できることを学びます．あとは省略しますが，標準的な場の量子論の講義はだいたいこんな具合に進んで行きます．

自然界の基本理論としての場の理論を手っ取り早く学ぶのには，こういう進め方で良いのかも知れませんが，この方向からのアプローチだけで終わってしまうと，実は場の量子論が持っているもう一つの，より物理的で豊かな内容に触れることができないことになるのです．

3.2 低エネルギー有効理論としての場の理論

場の理論の持つもう一つの重要な顔とは，「低エネルギー有効理論」として現れる場の理論です．これは，前節の後半で一端は否定されたかに見える「常識」，すなわち，波動場は何らかの「媒質」の振動エネルギーの伝播の形態であるという「常識」を，自然な形で復活させるものです．ここで対象となるのは，(ほとんど無限に) 多くの基本要素からなる物質系です．そのような例はいくらでもありますが，例えば，間隔 a で並ぶ格子上の各点に小さなスピン（磁石）$\vec{S}$ が配置されていて，最隣接点のスピンの間の相互作用のエネルギーが $H=-J\sum_{\langle i,j\rangle}\vec{S}_i\cdot\vec{S}_j$（ここで J は正の定数，また $\langle i,j\rangle$ は最隣接ペアのみをとるという記号）で与えられる，いわゆる強磁性体のハイゼンベルグスピン模型を念頭に置くと良いでしょう．

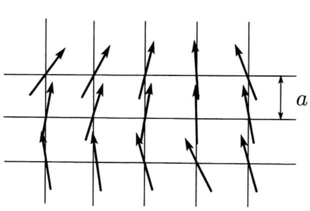


図 1　ハイゼンベルグスピン模型の概念図．

このとき，場の量子論は，「無限に近い自由度を持つ量子多体系の長距離（低エネルギー）での振る舞いを記述し理解するための，非常に強力で高い論理的整合性を持った枠組み」，として捉えることができます．

ここでのキーワードは三つあります．一つめは，「無限自由度」です．こうした多くの自由度が作る媒質中では，そこを伝播する様々な波長の波動が可能になり，それを量子力学的に扱うと，粒子（素励起）として振る舞い，散乱等の物理的現象を起こすことになります．上記のスピンモデルで言えば，隣接するスピンが次々に振動してスピン波が起こり，そのエネルギー量子はマグノンと呼ばれる粒子として振る舞うのです．

次の重要なキーワードは「長距離 = 低エネルギー」です．多体系をミクロに特徴付けるスケール（スピンモデルでは格子間隔 a）に比べて遙かに長い波長で系を探査すると，ミクロな詳細は見えずに平均化され，連続的な場（スピンモデルでは適当に平均化されたスピンの連続分布 $\vec{S}(\vec{x})$）で記述することが可能になります*6)．

三つめのキーワードは「高い論理的整合性」です．今述べた低エネルギー有効理論という考え方は，場の理論の「近似理論」としての見方を強調していますが，実はしばしばその近似理論がそれ自身非常に高い論理的整合性を持ち，その近似の有効範囲が大きく拡大する，ということが起こります．後述する繰り込み可能理論がこれです．この性質は熱力学の持つ性質に似ていると言えます．実際，熱力学は無限自由度の中からほんの一握りの平均化された物理量を取り出してその関係を与えるわけですが，それ自体ほぼ独立した論理体系をなす，いわば究極的な有効理論となっているからです．

4. 繰り込みと繰り込み可能理論

前節で，場の理論の一見非常に異なる二つの顔，すなわち，短距離（高エネルギー）での基本法則を表す場の理論と，長距離（低エネルギー）での有効理論として現れる場の理論，について簡単に触れましたが，もう少し詳しくこれらの特徴とその間の関係を見ていくことにしましょう．この考

*6)　正確に連続的な記述ができるためには，スピン間の相関距離が格子間隔に比べて非常に大きくなる 2 次以上の相転移点の近くで考えなければいけませんが，以下の議論に関しては直感的な描像で十分です．

察は，場の理論とは何か，を理解する上で非常に重要になります．

すでに述べたように，これらの二つのタイプの場の理論は，場の波動が伝わる「媒質」の実在性に関して非常に異なる性質を持っていましたが，同時に場の理論の性質がエネルギースケールに強く依存するかどうかという点でも，見かけ上大変異なる様子を示しています．例えば基本法則を表す場の理論の典型例として電磁場の理論を考えて見ればわかるように，それは一つの定まった形のハミルトニアンで記述されており，どのようなエネルギースケールの現象の記述にも共通に用いることができます．一方，ミクロな多体系の有効理論として現れる場の理論の場合は，どのくらいの波長（エネルギースケール）で系を見るかによって，平均化のされ方が異なるため，有効な自由度や，重要になる相互作用が一般に変わってきます．すなわち，有効理論のハミルトニアンの形は，スケールに依存するのです．

この性質を明確に捉えたのが K.G. ウィルソン等によって強調された「繰り込み変換」とそれによる「因子化」の考え方です[*7]．前述のハイゼンベルグスピン模型を例にとって簡単にその本質を説明しましょう．

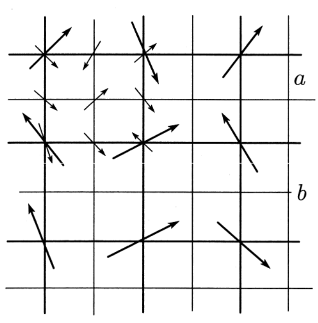


図 2 繰り込み変換の考え方．

ミクロなハミルトニアンはすでに与えたように

$$H_\Lambda = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \tag{1}$$

の形をしているとします．ここで添え字 $\Lambda = 1/a$ はこの模型が定義される基本的なエネルギースケールを表します[*8]．さて，ここで a より大きな長さのスケール b（図 2 では $b = 2a$ としています）で有効な記述を得るために，もともとのスピンを平均化して，間隔 b のより粗い格子上で定義された「有効スピン」（図 2 で示した大きなスピン）を考え，それらの間の相互作用を記述するハミルトニアンを計算します．この「平均化」によってハミルトニアンの形は，H_Λ からずれてきます．そしてさらに，元の理論との比較を容易にするため，間隔 b の格子を (a/b) 倍して縮小し元の格子と重なるようにします．この一連のプロセスは「繰り込み変換」と呼ばれ，それによって，典型的なエネルギースケールが Λ から $\Lambda(a/b)$ に下がったプロセスに対して有効な記述を得ることができます．そしてこれを k 回繰り返してやると，結局 $\mu \equiv \Lambda(a/b)^k \equiv 1/L$ というより低いエネルギーでの有効理論が得られます．こうして得られたスケール μ での有効理論のハミルトニアンは一般に次のような形をとります．

$$H_\mu = \sum_n \underbrace{g_n(\mu)}_{\mathrm{UV}} \underbrace{\mathcal{O}_n(\mu)}_{\mathrm{IR}} \,. \tag{2}$$

ここで，$\mathcal{O}_n(\mu)$ は有効スピン間の相互作用を表す演算子であり，もともとの相互作用 $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ のみならず，例えば $(\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j)^2$ のような様々な相互作用が「平均化」のプロセスで生成されます．そして，それらの相互作用の強さを表すのが有効結合定数 $g_n(\mu)$ です．式 (2) に示したように，ハミルトニアンは，長さのスケールが $L = 1/\mu$ より小さな短距離（「紫外 =UV(ultraviolet)」領域）での相互作用の情報を集約した部分 $g_n(\mu)$ と，それより長距離（「赤外 =IR(infrared)」領域）で有効な相互作用を記述する部分 $\mathcal{O}_n(\mu)$ の積に分解された形（の和）になっており，紫外と赤外の「因子化（factorization）」と呼ばれます．これはまさ

*7) 繰り込み群自体は以前から知られていたのですが，その理解は形式的であり，ウィルソン等によって始めてその深い物理的な意味が明らかにされたのです．

*8) 次元を考慮すると正確には，$\Lambda \equiv hc/a$ ですが，以下では光速度 c およびプランク定数 h を 1 とする単位系をとります．

しく，有効理論としての場の理論がスケールに依存するという性質を明確に表しています．

今まで述べてきたことは非常に一般的に成り立つ構造ですが，理論によっては，エネルギースケール μ を下げていくと，ほとんどの n に対して $g_n(\mu)$ がどんどんゼロに近づき，有限個の $g_n(\mu)$ のみが残ってくることがあります．しかも一端このようなことが起こると，あとはさらに μ を変えても残った $g_n(\mu)$ がゆっくりと変化するだけで，ハミルトニアンの形がもはや変わらなくなるということが起こりえます．このような理論を「繰り込み可能理論」と言います．このような理論では，我々が観測を行う（比較的低い）エネルギー領域においては，理論は有限個の結合定数のみで支配されており，それを適当なエネルギー μ_0 で実験と合わせてしまえば，あとのスケール依存性は上記の繰り込み変換にあたる操作で計算ができてしまうのです．特に $g_n(\mu)$ の変化が $\sim \log(\mu/\mu_0)$ のように対数的である場合には，非常に広範な μ の領域で理論が安定的に有限個の結合定数で記述される，という望ましい状況が実現します．そして，実はこれこそが，現在の自然界の基本理論である「標準模型」と呼ばれる場の理論が持っている性質なのです．すなわち，場の理論は本質的にスケール依存性を持つにも関わらず，繰り込み可能な理論においてはそれがほとんどなくなってしまうため，基本理論としての顔が出現するのです．

5. ふたたび，何が振動しているのか

さて最後に．もう一度，このような「基本理論」としての場の理論では何が振動しているのか，という問いに戻って本稿を締めくくることにしましょう．

媒質の存在から出発する低エネルギー有効理論の解析において，まず最初に調べなければならない大事なことは，系の基底状態，すなわち最もエネルギーの低い状態，が何かということです．これは一般に系のダイナミックスを解かなければわからない難しい問題ですが，前述の（温度がゼロの場合の）ハイゼンベルグスピン系の例では，すべてのスピンが同じ方向に並んだ状態が基底状態となり，スピンは場所に依らない一様なベクトル値 $\vec{S}_0$ をとることが容易に理解されるでしょう*9)．しかし，実際にこれらのスピンが存在することを見るには，外から光などをあてて探ってやらなければなりません．すると，光のエネルギーをもらったスピンは局所的に振動し，それが次々と隣に伝わってスピン波が生じ，すでに述べたように，量子力学的にはマグノンという粒子の伝播として観測されることになるわけです．つまり，もとの多体系（媒質）が直接見えるのではなく，その基底状態の上の素励起が見えるのであって，それを場の励起として記述するときには，もはや基底状態は単なる「真空」として捨象されてしまう，ということが起こるのです．さらに，非常に強く結合している多体系の場合，そうした素励起は，単純にもともとの個々の構成要素の振動とは解釈できない場合が頻繁に起こります．こうしたメカニズムを考え合わせると，「標準理論」という基本的な場の理論も，実はその背後にある何らかのよりミクロな理論から得られる低エネルギー有効理論である，という可能性も十分あると言えます．我々は直接には有効理論としての場の理論における「真空」の上に生ずる「振動」しか観測することができないのですが，その背後にははるかに豊かな場の理論あるいはそれを超える世界が隠れているかもしれないのです．

（かざま・よういち，東京大学大学院総合文化研究科）

*9) これはまさしく冒頭で述べたヒッグズ場の「凝縮」部分に対応するのですが，ここでは詳しい解説は割愛します．

運動する弦と振動

弦理論

伊藤　克司

1. はじめに

素粒子とその相互作用を統一する理論の候補として，超弦理論が有力視されている．弦はプランク長さ $l_{\mathrm{P}} \sim 1.6 \times 10^{-33}\,\mathrm{cm}$ の長さをもち，これは現在の粒子加速器で調べることができる長さのスケール $10^{-16}\,\mathrm{cm}$ よりはるかに小さい．この極微のスケールにおける弦の振動を議論するのが本稿の目的である．素粒子の模型としての弦を調べたいので，相対論的な弦の運動を考えることにする．

その際，弦の振動と共にその運動と量子効果を調べることが重要になる．量子効果はしばしば弦理論そのものの構造を決定してしまう．これは弦が多くの自由度（振動モード）をもち，高い対称性をもつことに起因している．本稿では，弦理論における弦の運動とその量子論についてできるだけ簡潔に説明したい．より本格的に知りたい人は文献 1～5) 等を参考にして下さい．

2. 弦の運動方程式

はじめに D 次元 Minkowski 時空中を運動する相対論的な弦の古典的な運動について考えよう．$D=4$ としたいのであるが，後で議論するように，量子効果を取り入れた矛盾のない弦理論を構成するには 4 次元時空は狭すぎるので，一般の D 次元時空中の弦を扱うことにする．D 次元 Minkowski 時空の計量を $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$ $(\mu, \nu = 0, 1, \cdots, D-1)$ と選ぶ．まず，弦の長さが小さく点粒子とみなすことができる場合，作用は相対論的点粒子の作用となるだろう．これは粒子の座標 X^μ の軌跡（世界線）を $X^\mu(\tau)$ とパラメーター τ でラベルすると，微小不変距離の 2 乗 $ds^2 = -\eta_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\tau}\frac{dX^\nu}{d\tau}(d\tau)^2$ を用いて

$$S = -m\int ds$$

と定義される（図 1）．自然単位系（$\hbar = c = 1$）で考えると，作用は無次元，ds は長さの次元をもつので，定数 m は $[\text{長さ}]^{-1} = [\text{質量}]$ の次元をもつ．パラメーターとして粒子の時間座標を選ぶ（$\tau = X^0$）と，作用は

$$S = -m\int dX^0\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{D-1}\left(\frac{dX^i}{dX^0}\right)^2}$$

となり，m は粒子の静止質量を表すことがわかる．

弦の作用は，これを拡張して，弦の時空中の運動の履歴を表す世界面の微小不変面積を用いて定義される．世界面を座標 (τ, σ) でパラメーター付け

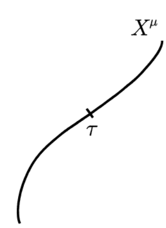


図 1　粒子の世界線．

すると，弦の張る2次元曲面は $X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$ で表される．σ は弦上の点をラベルし，τ はその時間発展をラベルするパラメーターである．$\dot{X} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$ は時空内の曲面の時間発展方向の接ベクトルであり，時間的なベクトル $\dot{X}^2 < 0$ である．一方で $X' = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$ は弦に沿った方向の接ベクトルであり，空間的なベクトル $(X')^2 > 0$ である．微小面積要素 dA は

$$dA = \left|\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}\right| \left|\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\right| \sin\theta d\sigma d\tau$$

で与えられる（図2）．ここで θ はベクトル $\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$, $\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$ のなす角であり，その内積

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} = \left|\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}\right| \left|\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\right| \cos\theta$$

から

$$dA = \sqrt{(\dot{X}X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2} d\sigma d\tau$$

と計算することができる．これは時空に埋め込まれた曲面の誘導計量

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha}\frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma^\beta}$$

を用いて（$\sigma^\alpha = (\sigma^0, \sigma^1) = (\tau, \sigma)$）

$$dA = \sqrt{-g} d\sigma d\tau, \quad g = \det(g_{\alpha\beta})$$

とも表すことができる．作用

$$S = -T \int \sqrt{-g} d\sigma d\tau$$

を**南部–後藤作用**[6)]と呼ぶ．T は［長さ］$^{-2}$ =［質量］/［長さ］の次元をもち，弦の単位長さあたりのエネルギー（張力）に対応する．

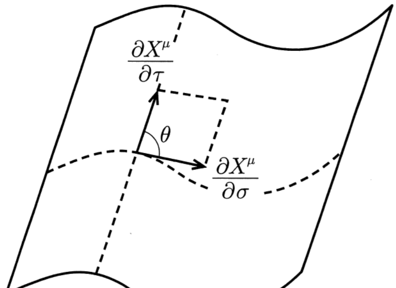


図2 弦の世界面．

弦の運動方程式は作用の変分から導かれる．パラメーター (τ, σ) の変域を，それぞれ区間 $[\tau_0, \tau_1]$, $[0, \bar{\sigma}]$ として，変分 $X^\mu \to X^\mu + \delta X^\mu$ を行うと

$$\begin{aligned}\delta S = &\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \, \frac{\partial L}{\partial X'_\mu}\delta X^\mu \bigg|_{\sigma=0}^{\sigma=\bar{\sigma}} \\ &- \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int_0^{\bar{\sigma}} d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_\mu}\right) \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial L}{\partial X'_\mu}\right) \delta X^\mu \right) = 0\end{aligned}$$

を得る．ここで $L(\dot{X}, X') = -T\sqrt{g}$ はラグランジアンである．これから Euler–Lagrange 方程式

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial X'_\mu}\right) = 0 \qquad (1)$$

が得られる．

作用の不変性を議論するためには，弦の端点 $\sigma = 0, \bar{\sigma}$ における境界条件を考えなければならない．開弦の場合は，2種類の条件

1. Neumann 型境界条件

$$\frac{\partial L}{\partial X'_\mu} = 0, \quad \sigma = 0, \bar{\sigma}$$

2. Dirichlet 型境界条件

$$\delta X^\mu = 0, \quad \sigma = 0, \bar{\sigma}$$

がある．閉弦の場合は周期的境界条件

$$X^\mu(\sigma + \bar{\sigma}) = X^\mu(\sigma)$$

がある．開弦の場合は $\bar{\sigma} = \pi$，閉弦の場合は $\bar{\sigma} = 2\pi$ ととるのが普通である．

弦の作用は，大域的変換である X^μ の Poincaré 変換 $X^\mu \to a^\mu{}_\nu X^\nu + b^\mu$ の下で，さらに局所的な変換である**パラメーターの付け替え（reparametrization）** $\sigma^\alpha \to \sigma'^\alpha = f^\alpha(\sigma)$ の下で不変である．Poincaré 不変性に関して，Noether の定理により弦の全運動量 P_μ，角運動量 $M_{\mu\nu}$ の保存が導かれる．

$$P^\mu = \int_0^{\bar{\sigma}} d\sigma P^\mu_\tau, \qquad (2)$$

$$M^{\mu\nu} = \int_0^{\bar{\sigma}} d\sigma \left(P^\mu_\tau X^\nu - P^\nu_\tau X^\mu \right) \qquad (3)$$

ここで $P^\mu_\tau = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_\mu}$ は，X^μ の共役運動量である．

南部–後藤作用から導かれる弦の座標 X^μ の運動方程式 (1) は複雑なので，理論のもつ対称性を使い，方程式が簡単になるような座標系をとると便利である．reparametrization を使い，誘導計量を対角行列にするような座標系，つまり

$$\dot{X}X' = 0, \quad \dot{X}^2 + (X')^2 = 0 \qquad (4)$$

となるような座標 (τ, σ)（正規直交系）を選ぶ．このときラグランジアンは $L = \frac{T}{2}(\dot{X}^2 - (X')^2)$ となり

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_\mu} = T\dot{X}^\mu, \quad \frac{\partial L}{\partial X'_\mu} = -TX'^\mu$$

を得る．従って運動方程式は

$$\ddot{X}_\mu - X''_\mu = 0 \qquad (5)$$

と表すことができる．これは波動方程式であり，適当な境界条件の下で解くことができる．

開弦の場合を考えよう．Neumann 型境界条件の場合，$\sigma = 0, \pi$ で $X'_\mu = 0$ となるので

$$X^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} X^\mu_n(\tau) \cos n\sigma$$

と展開できる．各 $X^\mu_n(\tau)$ は微分方程式

$$\ddot{X}^\mu(\tau)_n + n^2 X^\mu_n(\tau) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

を満たし，$n \neq 0$ のとき調和振動子の方程式となる．$a^\mu_n(\tau)$ を

$$a^\mu_n(\tau) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi T}{n}}(\dot{X}^\mu_n - inX^\mu_n)$$

で定義すると，それは 1 階の微分方程式 $\dot{a}^\mu(\tau) = -ina^\mu_n(\tau)$ を満たし

$$a^\mu_n(\tau) = a^\mu_n e^{-in\tau}$$

と解くことができる．引数なしの a^μ_n は $\tau = 0$ における $a^\mu_n(\tau)$ の値である．$X^\mu_n(\tau)$ は a^μ_n とその複素共役 $a^{\mu *}_n$ を使って，

$$X^\mu_n = i\sqrt{\frac{1}{\pi T n}}(a^\mu_n(\tau) - a^{\mu *}_n(\tau)).$$

$n = 0$ の場合（ゼロモード），$X^\mu_0(\tau)$ は $\ddot{X}^\mu_0 = 0$ を満たすので

$$X^\mu_0 = x^\mu + \frac{1}{\pi T}p^\mu \tau$$

となる．τ の 1 次の係数は弦の全運動量 (2) が p^μ となるようにとった．まとめると開弦の座標は

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + \frac{p^\mu}{\pi T}\tau + i\frac{1}{\sqrt{\pi T}} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{\mu *}_n e^{in\tau} - a^\mu_n e^{-in\tau}}{\sqrt{n}} \cos n\sigma \qquad (6)$$

と展開される．

Dirichlet 型境界条件の場合，$X^\mu(0, \tau) = 0$ および $X^\mu(\pi, \tau) = y^\mu$ と選ぶと，

$$X^\mu(\sigma, \tau) = y^\mu \frac{\sigma}{\pi} + i\frac{1}{\sqrt{\pi T}} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{\mu *}_n e^{in\tau} - a^\mu_n e^{-in\tau}}{\sqrt{n}} \sin n\sigma$$

と展開できる．Neumann 型境界条件の場合と違って sin 関数で展開されている．

閉弦の場合は σ 座標が周期 2π をもつので

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + \frac{p^\mu}{2\pi T}\tau + i\frac{1}{\sqrt{\pi T}} \times \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \alpha^\mu_n e^{in(\tau+\sigma)} + \tilde{\alpha}^\mu_n e^{in(\tau-\sigma)}$$

と展開される．いずれの場合も X^μ は条件 (4) を満たさなければならない．

例えば，

$$X^0 = \kappa\tau,$$
$$X^1 = \kappa \cos\tau \cos\sigma, \quad X^2 = \kappa \sin\tau \cos\sigma$$

（κ は定数）は，運動方程式の解であると同時に条件 (4) を満たしている．この弦のエネルギー $E = P^0$ と角運動量 $J = M^{12}$ を求めると

$$E = T\kappa\pi, \quad J = \frac{T\kappa^2\pi}{2}$$

となる．これから κ を消去すると弦の角運動量と

エネルギーの関係式

$$\frac{J}{E^2}=\frac{1}{2T\pi}$$

を得る．右辺の定数は α' とも書かれ，**Regge スロープパラメーター**と呼ばれる．

3. 弦の解析力学

弦の力学の正準形式を考えよう．それは弦のラグランジアンから X^μ の正準共役運動量 P^μ_τ を求め Poisson 括弧を導入すればよいように思われる．しかしハミルトニアン H を直接計算してみると，$H=0$ となってしまうことがわかる．これは拘束条件をもつ力学系で生じる現象であり，弦の正準形式を考える場合に注意しなければならない．実際力学変数 P^μ_τ, P^μ_σ および X^μ は独立ではなく，拘束条件

$$P^\mu_\tau X'_\mu=0, \quad P^2_\tau+T^2X'^2=0,$$
$$P^\mu_\sigma \dot{X}_\mu=0, \quad P^2_\sigma+T^2\dot{X}^2=0$$

を満たす．ここで $P^\mu_\sigma=\frac{\partial L}{\partial X'_\mu}$ を導入した．正規直交系 (τ,σ) ではこの条件は (4) と同値である．この拘束条件の線形結合をとり

$$(\dot{X}\pm X')^2=0 \tag{7}$$

の形に表す．この拘束条件を **Virasoro 拘束条件**と呼ぶ．

開弦の場合を考えることにする．X^μ のモード展開 (6) を代入すると

$$(\dot{X}+X')^2=-\frac{2}{\pi T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}L_n e^{-n(\tau+\sigma)}$$

と展開される．ここで

$$L_n=-\frac{\pi T}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha^\mu_{n-m}\alpha_{\mu m},$$

および $\alpha_0=\frac{1}{\pi T}p^\mu$, $\alpha^\mu_n=\sqrt{\frac{n}{\pi T}}a^\mu_n$ $(n>0)$, $\alpha^\mu_n=\sqrt{\frac{|n|}{\pi T}}a^{\mu *}_n$ $(n<0)$ である．Virasoro 拘束条件は $L_n=0$ と表される．特に

$$L_0=-\frac{\pi T}{2}\left(\frac{1}{\pi^2T^2}p^2+\frac{2}{\pi T}\sum_{n=1}^{\infty}na^*_na_n\right)$$

より，$L_0=0$ 条件は

$$M^2=-p^2=2\pi T\sum_{n=1}^{\infty}na^*_na_n \tag{8}$$

となる．これは弦の静止質量と振動モードの関係（**質量殻条件**）を表している．

さて拘束条件を考慮して，力学変数 X^μ, P^μ に Poisson 括弧を導入しよう．拘束系の問題の扱い方には，2 通りある．一つは拘束条件に Lagrange の未定乗数を導入する方法であり，この方法では明白な Lorentz 共変性を保つことができる．しかしこの方法は量子論に移行するときに負ノルム状態が生じる問題をきちんと扱わなければならない．別の方法は，拘束条件を解いて物理的なモードのみで理論を表す方法である．この方法は光円錐ゲージの方法と呼ばれる．ただし，この方法では明白な Lorentz 共変性は失われる．ここでは光円錐ゲージの方法を用いることにする．

弦座標を $X^\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(X^0\pm X^1)$, X^i $(i=2,\cdots,D-1)$ と分解する．X^i は横波モードと呼ばれる．X^0, X^1 はそれぞれ時間的モード，縦波モードと呼ばれ非物理的な自由度を表す．光円錐ゲージとは X^+ 方向に世界面の時間軸を選び

$$X^+=\frac{1}{\pi T}p^+\tau, \quad P^+_\tau=\frac{p^+}{\pi}$$

とおくことである．このゲージ条件の下で Virasoro 条件を解き，横波モードで表すことができる．

$$X^{-\prime}=\frac{\pi}{p^+}P^i_\tau X^{i\prime},$$
$$P^-_\tau=\frac{1}{2\pi p^+}\left[\pi^2(P^i_\tau)^2+\pi^2T^2(X^{i\prime})^2\right].$$

また質量殻条件は

$$M^2=2\pi T\sum_{n=1}^{\infty}na^{i*}_na^i_n$$

と表される．この表式は共変的な式 (8) と異なり，正定値である．

横波自由度に対する Poisson 括弧は

$$\{X^i(\sigma,\tau), P^j_\tau(\sigma',\tau)\} = \delta^{ij}\delta(\sigma-\sigma')$$
$$\{X^i(\sigma,\tau), X^j(\sigma',\tau)\} = \{P^i_\tau(\sigma,\tau), P^j_\tau(\sigma',\tau)\} = 0$$

となる．これをモード展開で表すと，非自明な Poisson 括弧

$$\{a^i_n, a^{j*}_m\} = i\delta^{ij}\delta_{n,m}, \quad \{x^i, p^j\} = -\delta^{ij}$$

を得る．さらに L_n は

$$\{L_n, L_m\} = -i(n-m)L_{n+m}$$

を満たす．

4. 弦の量子化と臨界次元

弦の量子論に移るには，Poisson 括弧を交換子に置き換える．展開モード a_n, a^*_n は調和振動子の消滅・生成演算子 $a_n, a^\dagger_n$ となり，交換関係

$$[a^i_n, a^{j\dagger}_m] = \delta^{ij}\delta_{n,m}, \quad [x^i, p^j] = i\delta^{ij}$$

が成り立つ．交換関係 $[a, a^\dagger] = 1$ である振動数 ω の調和振動子のハミルトニアンは $H = \omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ であり，定数項 $\frac{\omega}{2}$ は**零点エネルギー**と呼ばれる．質量殻条件は

$$M^2 = 2\pi T\left(\sum_{n=1}^{\infty} n a^{i\dagger}_n a^i_n - a\right)$$

となる．ここで a は定数であり，

$$a = -\frac{D-2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n \qquad (9)$$

と表される．これは $(D-2)\times\infty$ 個の調和振動子の寄与からなる零点エネルギーである．

開弦の Hilbert 空間は各モードの調和振動子の Hilbert 空間と運動量演算子 $\hat{p}^i$ の固有状態から構成される．状態 $|0;p^i\rangle$ は a_n により消され，固有値 p^i の固有状態として定義される．

$$a^i_n|0;p^i\rangle = 0, \quad \hat{p}^i|0;p^i\rangle = p^i|0;p^i\rangle.$$

この状態は 2 乗質量演算子 M^2 の固有値 $-a$ をもつ．第一励起状態はこの状態に $a^{i\dagger}_1$ を作用させた状態

$$a^{i\dagger}_1|0;p^i\rangle$$

である．この状態は M^2 の固有値 $1-a$ の状態である．こうした状態は D 次元 Poincaré 群の表現に従っていなければならない．

D 次元 Poincaré 群の表現は massless と massive 表現に分類され，各表現はその little 群の表現で分類される．massless 表現の粒子は座標系をうまく選ぶと運動量を $p^\mu = (p, 0, \cdots, 0, p)$ ととることができ，その little 群は p^μ を不変にする群 $SO(D-2)$ である．massive 表現の粒子は運動量 $p^\mu = (m, 0, \cdots, 0)$ の座標系で考えると little 群は p^μ を不変にする群 $SO(D-1)$ となる．第 1 励起状態は Poincaré 群の $D-2$ 次元表現であり，これは massless 表現の $SO(D-2)$ の $D-2$ 次元表現に対応している．従ってこの表現は massless 表現であり，$M^2=0$ の固有状態である．これは $a=1$ を意味し，零点エネルギーが Poincaré 不変性から決まったことになる．すると状態 $|0;p^i\rangle$ は負の 2 乗質量 $-2\pi T$ をもつスカラー場（タキオン）に対応する．第 1 励起状態 $a^{i\dagger}_1|0;p^i\rangle$ は零質量のベクトル粒子に対応し，さらに $a^{j\dagger}_n$ を作用させて得られる励起状態は有質量のテンソル粒子に対応する．

光円錐量子化によると零点エネルギーは (9) と評価される．この右辺の量は発散しており，真空のエネルギーに対応している．この量をゼータ関数正則化により評価する．Riemann のゼータ関数 $\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}\, s > 1$ となる複素数 s に対して絶対収束級数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

で定義される．知りたい値はちょうど $s=-1$ での値になる．s を複素平面に解析接続すると

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

が得られる．従って $a=1$ となるためには $D=26$ でなければならない．さらに $D=26$ のときのみ

Lorentz 対称性が成立することも示される．

弦の世界面の座標 (σ,τ) をうまくとると，弦の運動方程式は通常の波動方程式になった．この正規直交条件 (4) により (τ,σ) は一意的には決まらず，新しい座標 $\tilde{\sigma}=\tilde{\sigma}(\sigma,\tau)$, $\tilde{\tau}=\tilde{\tau}(\sigma,\tau)$ が

$$\frac{\partial\tilde{\tau}}{\partial\tau}=\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\sigma},\quad \frac{\partial\tilde{\tau}}{\partial\sigma}=\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tau} \tag{10}$$

を満たせば，正規直交条件を満たすことがわかる．これは $\sigma^{\pm}=\tau\pm\sigma$ が

$$\tilde{\sigma}^{+}=\tilde{\sigma}^{+}(\sigma^{+}),\quad \tilde{\sigma}^{-}=\tilde{\sigma}^{-}(\sigma^{-})$$

を満たすことと同じである．パラメーター τ を $-i\tau$ と解析接続して，複素座標 $z=\tau-i\sigma$, $\bar{z}=\tau+i\sigma$ を導入すると，(10) は Cauchy–Riemann 方程式と同等になり，変換 $\tilde{z}=\tilde{z}(z)$ は z の正則関数で，世界面の座標 $(z,\bar{z})$ の共形変換を引き起こす．共形変換の生成子は L_n であり，Virasoro 代数

$$[L_n,L_m]=(n-m)L_{n+m}+\frac{D}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}$$

を満たす．$X^{\mu}(z,\bar{z})$ は世界面上の自由スカラー場となり，2 次元の共形場理論の手法を適用して弦の散乱振幅や分配関数等の計算ができる[3)]．弦の量子論では，トーラスに巻き付いた Neumann 型境界条件をもつ開弦理論と Dirichlet 型境界条件をもつ開弦理論の等価性を示すことができる（**T-双対性**）．また開弦の 1 ループ振幅は閉弦の円筒振幅ともみなすことができる（**開弦–閉弦双対性**）．双対性は弦理論のもつ高い対称性の反映であり，物理現象を様々な形で記述することを可能とする．

5. AdS/CFT 対応と弦の古典解

ボソン弦理論の臨界次元は $D=26$ であり，ボソンとフェルミオンを入れ替える超対称性を取り入れた超弦理論の臨界次元は $D=10$ となる．我々の住む時空の次元は 4 次元であり，余剰次元のコンパクト化という問題を考えなければならない．曲がった時空中の弦の量子化は難しい問題である．

近年，ある高い対称性をもつ曲がった時空中の超弦理論が超対称ゲージ理論と等価であるという，**AdS/CFT 対応（ゲージ重力対応）**が注目されている．それは 5 次元反ドジッター時空と 5 次元球面の直積 $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ 上の IIB 型超弦理論と 4 次元 $N=4$ 超対称 $SU(N)$ ゲージ理論（共形場理論）が等価であるという予想である．この対応で特徴的なことは，弦理論の古典解がゲージ理論の強結合領域における複合演算子と対応していることである．この対応により，ゲージ理論や超弦理論の強結合領域の物理を調べることができる．この弦の古典解を導き出す弦の運動方程式について考察しよう．これは数学的には曲がった時空中の極小曲面を求めるという問題でもある．

計量 $G_{MN}(X)$ $(M,N=0,\cdots,D-1)$ をもつ D 次元時空中を運動する閉弦の作用は

$$S=\frac{T}{2}\int d\sigma d\tau G_{MN}(X)\partial_{+}X^{M}\partial_{-}X^{N}$$

で与えられる．ここで $\partial_{\pm}=\frac{\partial}{\partial\sigma^{\pm}}$ $(\sigma^{\pm}=\tau\pm\sigma)$ である．$X_M(\sigma,\tau)$ は σ について周期 2π をもち，Virasoro 条件

$$G_{MN}\partial_{\pm}X^{M}\partial_{\pm}X^{N}=0$$

を満たす．簡単のため $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ 時空の部分空間 $\mathbf{R}\times\mathrm{S}^2$（半径 R とする）中の弦の運動を考えよう．弦は時間座標 $X^0=\kappa\tau$（κ は定数）と 2 次元球面の座標 $R\vec{X}=R(X^1,X^2,X^3)$（$\vec{X}^2=1$）で決まる．弦の作用は，弦座標をスケール倍して半径 R の因子をくくりだすことにより

$$S=\frac{TR^2}{2}\int d\sigma d\tau(\partial_{+}\vec{X}\partial_{-}\vec{X}+\lambda(\vec{X}^2-1))$$

となる．λ は Lagrange 未定乗数である．運動方程式と Virasoro 条件は

$$\partial_{+}\partial_{-}\vec{X}+(\partial_{+}\vec{X}\cdot\partial_{-}\vec{X})\vec{X}=0,$$
$$(\partial_{+}\vec{X})^2=(\partial_{-}\vec{X})^2=1$$

となる．この方程式は

$$\partial_{+}\vec{X}\cdot\partial_{-}\vec{X}=\cos\varphi$$

とおくと

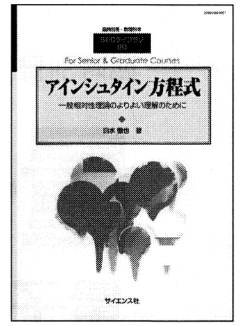
$$\partial_+\partial_-\varphi + \sin\varphi = 0$$

と同等であることが示される．これは **sine–Gordon 方程式**と呼ばれ，ソリトン方程式の代表的なものである．このソリトン解は場の理論のゲージ不変な複合演算子に対応しており，その解のエネルギーが複合演算子のスケール次元に対応することが確かめられている[7]．この他にも AdS_5 側の弦の古典解とゲージ理論の Wilson ループやグルーオン散乱振幅との対応等，ゲージ重力対応の検証に関して弦の古典解の可積分性が重要な役割を果たしている[8]．

参考文献

1) 今村洋介，『超弦理論の基礎』，数理科学別冊 SGC ライブラリ 80, サイエンス社.
2) B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Cambdrige University Press, 2004.
3) J. Polchinski, *String Theory*, Cambridge University Press, 1998 (和訳：伊藤，小竹，松尾共訳，『ストリング理論』1, 2 巻，丸善).
4) M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University Press, 1987; K. Becker, M. Becker, J.H. Schwarz, String Theory and M-Theory—A Modern Introduction—, Cambridge University Press, 2007.
5) J. Scherk, *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 123.
6) Y. Nambu, Lectures at the Copenhagen Symposium, 1970.
T. Goto, *Prog. Theor. Phys.* **46** (1971) 1560.
7) レビューとして N. Dorey, *J. Phys.* **42** (2009) 254001.
8) 伊藤克司，日本物理学会誌 **66** (2011) no.5, 353–360.

（いとう・かつし，東京工業大学大学院理工学研究科）



アインシュタイン方程式
一般相対性理論のよりよい理解のために

白水徹也著，B5 判，152 頁，本体 2238 円，サイエンス社

本書は，主に重力理論の数理的側面に関する様々な問題を研究してきた著者による，一般相対論の発展的内容を扱った大学院生および研究者向けの教科書である．

一般相対論の基礎方程式であるアインシュタイン方程式は，計量に対する方程式であり，その解をもって時空多様体を決定する．左辺の“時空の幾何学”と右辺の“物質とエネルギー”を結びつけるこの方程式は，しばしば美しい物理法則の代名詞のようにいわれる．1960 年代前半までの一般相対論の研究では，アインシュタインを冠するこの非線形偏微分方程式をいかに解くかという，いわば外延的研究に多くの興味と労力が集中した．回転ブラックホール時空を表すカー解の発見などは，その最高潮にあたるといってよいだろう．その後ペンローズらが特異点定理をもって大域的微分幾何の手法を導入した 1960 年代後半以降は，アインシュタイン方程式の内包的性質も注目され，ブラックホールの唯一性や正エネルギー定理といった大きな成果が生み出された．

本書の題名も「アインシュタイン方程式」となってはいるが，方程式の導出や解の求め方といった部分は肝心ではない．むしろ著者の近年の研究に直結するトピックスを取り上げ，そこでアインシュタイン方程式がどのように使われているのか，その役割を解説するのが目的であろう．実際，まえがきに「日本の標準的な教科書で取り上げない話題を取り上げている」とある．

それでも初めの 3 章は，ほぼ標準的な内容で，本書を読む上で必要な数学的道具を用意し，他の教科書に頼らなくても読み進められるよう配慮されている．まず第 1 章で，微分幾何学の基礎の復習をし，第 2 章で，アインシュタイン方程式の導出を行う．ニュートン理論との比較に基づくオーソドックスな方法と作用原理による導出の二つを解説している．“方程式”と言えば，その“解”である．第 3 章では，アインシュタイン方程式の厳密解のうち，ブラックホールと宇宙モデルから，シュバルツシルト解や宇宙項を含む極大対称な解であるドジッター時空および反ドジッター時空など，いくつか典型的な例を取り上げ，その時空構造を概説する．大域的因果構造の理解を助ける「共形図」については，もっと詳細な説明を期待したいところだが，紙数の都合だろうか，はなはだ簡単になっている．

本書の特徴をなすのが，第 4 章以降の後半部分である．まず第 4 章と第 5 章とで，時空の「分解」と「接続」方法について詳しく解説し，時空内での超曲面の扱い方を準備する．その応用として膜宇宙論（ブレーン・ワールド）が語られる部分は，本書の真骨頂であろう．第 6 章では，重力孤立系のエネルギー，運動量，角運動量について解説し，それを踏まえて第 7 章では，特異点定理，正エネルギー定理，ブラックホールの唯一性といった「諸定理」が概説してある．これまでの日本語で書かれた教科書やモノグラフではあまり解説されなかった題材である．Hawking & Ellis や Wald らの本格的教科書（本書の参考文献欄 [1], [2]）で勉強する前に，こういった定理の主張と証明の概観を知りたい読者には，とても有益であろう．

書き方について一言述べよう．抽象添字に関する説明に限ってではあるが，脚注にて「ウォルドの教科書…説明は筆者にはくどく感じるが気のせいだろうか」とある．本書は全体をとおして説明がくどくならないよう記述はやや淡泊にしてある印象を受けた．しかし計算部分については丁寧に書かれており，有用な数学公式の導出の大部分が目の子で追えるよう配慮してある点で教育的でもある．

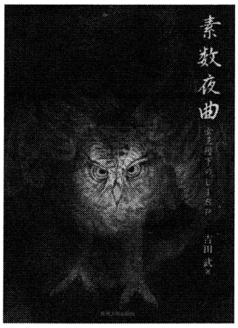
まえがきにもあるように，AdS/CFT 対応やブレーン宇宙論などの研究に動機づけられ，この十数年の間に素粒子論から物性理論まで多方面にわたって，重力理論との関係性が興味を持たれるようになってきた．本書は，こういった最近の話題に使われるアインシュタイン理論の技術面に，あまりややこしいこと抜きに真っ直ぐ入門してみたい大学院生や研究者に有用であるとともに，美しいアインシュタイン方程式が提供する時空の，ときに奇妙な，幾何学的性質・物理現象の一端を垣間見るのに恰好の一冊だと思う．

石橋　明浩（近畿大学理工学部）

素数夜曲

女王陛下のLISP

吉田武著，A5判，912頁，本体3600円，東海大学出版会



異形の書である．辞書のように分厚く重量感たっぷりな上に，真っ黒の表紙の中から梟がじっとこちらを見つめる．書店では否が応にも目を引く外見である．

このたっぷりの分量の本は二つの部分からなる．およそ350ページある本編は9章に分けられた初等整数論への入門である．こちらは「夜の一般講演を模した」と書かれているように，インフォーマルな語り口で語られ，複雑な証明は「配布資料」と名付けて章末に置かれている．そして本編よりボリュームのある後半の「付録」の目的は，前半で学んだ整数論のいろいろな現象をコンピュータを使って再現，あるいは観察してみることである．こちらは一転，「昼の大学の講義を模した」形式で，かっちりとした記述になっている．

このような二部仕立てとなっていることについて，著者は序で「(数学と) 計算機工学との融合を狙い，数学と計算機の隙間のない連携を目指す」と高らかに宣言している．

全体としては，意欲のある高校生から大学の1,2年生あたりを対象に書かれているが，数学と工学の両方にまたがるこのユニークな構成故に，どちらかの分野で経験を積んだ人が，もう一方の分野を知るため読むということも可能だろう．

前半と後半に分けて少し詳しくみていこう．

前半は初等整数論を学ぶ「理論篇」である．通常の教科書と違って，繰り返しや，脇道にそれることを恐れず，具体的な数字をたくさん使って饒舌に解説が進む．

その雰囲気を味わってもらうために第五章の内容をあげてみる．一次合同式の解法，連立一次合同式の解法のあとに，順列と組合せが出てきて二項係数が登場する．その関連で冪乗和について述べられ，その後は，フェルマーの小定理，オイラーの定理，原始根・指数と続き，平方剰余の相互法則でこの章は終わる．相互法則は章末の「配布資料」に証明が載っている．以降の章でも，通常は初等整数論の枠では語られることのない，デデキントの切断や複素数の話が挿入され，数の世界が拡大していく様子を学ぶことができる．このような，盛りだくさんの内容だが，ページ数をたっぷり使い，急がずに書かれているので，それほど詰め込まれた感じはしない．著者の熱い語り口にうまく乗ることができれば楽しめるに違いない．

本編より長大な後半は，前半で学んだ結果を計算機で確認する「実践篇」である．プログラム言語として選ばれているのはLISPの方言であるSchemeで，その選択の理由を著者はあとがきに次のように書いている．「言語の選択は極めて悩ましい．著作が長く読まれ，役に立つように，息の長い言語を選ぶことは当然として，その“教育能力”が問題になる．あらゆる処理が定義済みで，一文の入力で問題が解決できるなら，それは専用電卓を購入したことに過ぎず，全く教育的でない．随分と手は動かしたけれど，『頭は全く使わなかった』ということになる．従って，言語そのものを鍛え，言語を成長させていく過程が，そのまま数学的内容の理解へと繋がる，そんな言語を選ばねばならない．完璧なるMathematicaでは教育効果に乏しいのである．」

この選択をしたことで，整数論の実習に入る前に，Schemeの言語設計の原理・背景と，言語仕様の長い解説からこの後半は始まることになる．私はこの本ではじめてLISP系の言語を学ぶことになったが，実際この部分を読むのには時間がかかった．そして，いよいよ整数論のプログラムを作り始めるのだが，Scheme自体は何も整数論用の関数をもっていないので，一から手作りである．「言語そのものを鍛え，言語を成長させていく過程」を楽しむために十分な時間をかけることが必要だろう．こうしてでき上がるのはできることが限られた素朴なプログラムなので，数式処理や整数論ソフトウェアになれた目には正直なところもの足りない感じは否めない．かつて木田祐司氏のUBASICが与えてくれた手計算では絶対届かない境地を手軽に目の前にした驚きはここにはない．本当に言語の選択は難しいと思う．そしてその選択は何を主題にすえるかによっても当然変わってくる．そういう意味では，この本の後半の主役は実は整数論の計算ではなくて，それを題材にしたプログラミング技術の習得なのである．

ともあれ，数学と工学の二兎を追うことを目的としたこのユニークな独習教科書をきっかけに数学と工学の垣根が少しでも低くなることを期待したい．

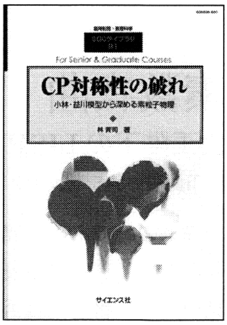
木田 雅成（電気通信大学大学院情報理工学研究科）

BOOK REVIEW

CP対称性の破れ

小林・益川模型から深める素粒子物理

林青司著，B5判，208頁，本体2476円，サイエンス社



2008年，南部陽一郎教授，小林誠教授，益川敏英教授の日本人3名がノーベル物理学賞を同時に受賞したことは記憶に新しい．受賞対象となった研究は「対称性の破れ」をキーワードとしており，特に小林・益川両教授の研究はCP対称性の破れに関するものであった．

CP変換とは簡単に言ってしまえば，粒子と反粒子の入れ替え操作（C変換）と鏡映操作（P変換）とを同時に行う変換のことである．古くはCP変換に対して自然法則は不変であると思われていた時代があった．しかし，1964年のK中間子崩壊におけるCP対称性の破れの発見と共に，CP対称性の破れの起源を理解することは，素粒子物理学における重要問題となった．この問題を解決したのが小林・益川両教授の歴史的論文であり，そこで提唱された模型（小林・益川模型）の正しさは，これまで様々な実験結果により検証されてきた．

本書は，CP対称性の破れについて理解することを主目的として，素粒子物理学やその基礎となる場の理論についての解説を行っている．特に，小林・益川模型におけるCPの破れの機構が，基礎的事項とあわせて丁寧に説明されており，そこで必要となる素粒子標準模型やヒッグス機構等に関しても，初学者にもわかりやすく説き起こされている．このため，CP対称性の破れに興味のある読者だけではなく，これから素粒子物理学を学ぼうとする人たちにとっても，本書は有益であろう．

現在多くの研究者の興味は，小林・益川機構以外の新たなCP対称性の破れの探求に移りつつある．例えば，ニュートリノ混合におけるCP対称性の破れについては，今後実験・理論双方から理解が進むと期待されている．また，宇宙の歴史に目を転じると，現在の宇宙においては物質（陽子や電子等）のほうが反物質（反陽子や陽電子等）よりも圧倒的に多く存在するが，そのような非対称性がどのようにして生まれたかはわかっていない．物質と反物質の非対称性の起源を理解する上でも，新たなCP対称性の破れが必要と考えられている．これらの話題を理解するための第一歩としても，本書は役立つであろう．

以下，本書の内容について紹介する．まず第1・2章において対称性とその破れが物理学（特に素粒子物理学）の分野で果たしてきた役割について簡単な説明がなされた後，第3・4章において小林・益川模型を理解する上で必要となる相対論的場の理論の基礎的事項がまとめられている．

5章から7章までが，素粒子標準模型とそれに基づく小林・益川機構によるCPの破れの機構の解説に充てられている．ゲージ対称性やヒッグス機構といった，標準模型の基礎的事項について5章で，また小林・益川機構を理解する上で重要となる標準模型のフレーバー構造について6章で説明を行った後，7章において小林・益川機構におけるCPの破れについての詳しい説明が与えられている．

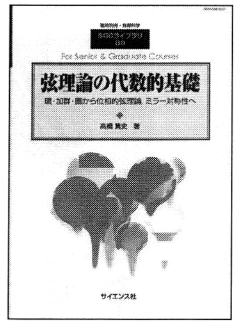
小林・益川模型の成功の理由の一つに，定量的な予言が可能であることがある．理論的予言を実験結果と比較して模型の定量的検証を行うことは，小林・益川機構を確立する上で極めて重要であった．著者は稲見武夫氏と共にこの分野，特に4体フェルミオン相互作用の研究に関して大きな寄与を行ってきた．これらの話題については，第8・9章で扱われている．

また，先にも述べた通り，今後のCP対称性の破れの研究は，宇宙進化（特に宇宙初期の物質・反物質非対称性の生成）に対するCPの破れの影響や，ニュートリノセクターにおけるCPの破れといったテーマが重要となると考えられる．これらについては，それぞれ第10・11章で解説されている．

素粒子物理学や場の理論に関する解説書はこれまでにも多く出版されてきたが，CP対称性の破れに焦点を当てて書かれたものは多くはない．本書は，小林・益川模型を理解する上で必要となる事項についての解説が過不足なくなされており，これから素粒子標準模型やそこでのCP対称性の破れについて勉強しようとする学生にとって好適の書である．

諸井　健夫（東京大学大学院理学系研究科）

書評



弦理論の代数的基礎

環・加群・圏から位相的弦理論，ミラー対称性へ

髙橋篤史著，B5 判，208 頁，本体 2476 円，サイエンス社

この本の内容は，タイトルの副題まで見ればほぼ明確である．圏論は数学の広い分野で応用されていて，特にこの本で取り上げられている話題も様々な分野の数学が絡み合いつつ発展してきたものであるが，タイトルに「代数的」とあるのは，代数学における環上の加群の圏の一般化といえるものが主な登場人物の一人となっていることもあるだろうし，扱っている内容が，様々な分野が絡み合いつつも現在の代数幾何学における大きな話題の一つであるという意味も含まれているのかもしれない．

まえがきで著者も述べているように，この本では物理学において議論されるような形で弦理論を扱うわけではない．つまり，1 次元の弦が時間発展することによってできる 2 次元面はいっさい出てこない．このようなわけで，弦理論を記述する 2 次元面上の共形場の理論も出てこないので，「代数的」といっても共形代数，超共形代数などが出てくるわけではない．一方，このようにして弦理論が定まったとき，特にその開弦の場の理論が満たすべき構造として次数付き微分代数（DG 代数），あるいは DG 圏があり，その DG 圏の持つ一般的な性質がこの本において中心的に議論される内容である．「これが弦理論を記述する数学なのか？」と思う人もいるだろう．弦理論から出てこない DG 代数や DG 圏がたくさんあるではないか！ というわけである．これはごもっともな意見ではある．しかし，物理で議論されているように弦理論を考えたときに得られるものが数学としてうまく定義されたものとなるとは限らない．これは「この世のすべてのものは最終的には数学の言葉で表されるはずである！」と信じる数学者にとって，我慢し難い代物なのである．このようなわけで，弦理論がうまく定義されたときに持つ数学的構造のほうに重心をおくことは数学者にとっては自然なことである（物理学者ならば「弦理論が常に矛盾なく定義されるように数学のほうを改良しなさい」といいたくなるかもしれないが，今まで美しく積み上げられてきた数学の根本的概念に変更を加えたがる数学者はそうはいない）．著者自身，まえがきでこのような立場を明確にしていて，のちに様々な数学的構造がでてくる都度それが弦理論における何に対応するものなのかが簡潔に説明されてある．勝手なことをいうと，これはむしろ「DG 圏を弦理論の定義とせよ」という著者からのメッセージなのかもしれない．評者はそこまでいう気はないが（著者もそう書いてはいないが），DG 代数，あるいは DG 圏を何らかの弦理論とみなし，簡単すぎてつまらない DG 代数，DG 圏はつまらない弦理論，あるいはつまらないほど簡単な弦理論のおもちゃモデルとみなすという考え方もあるかもしれない．

どちらにせよ，本書はとにかく数学的に定義されたもののみを扱っているので弦理論と切り離しても純粋に数学として価値のある内容となっている．2 つの環 R, S について，R 加群の圏 $\mathrm{Mod}(R)$ と S 加群の圏 $\mathrm{Mod}(S)$ が同値となるとき R と S は森田同値であるというが，これにまつわる森田理論の，環を DG 圏に拡張した場合にあたる DG 森田理論が本書の内容の一つの核となっている（環の積を圏の射の合成と対応させることによる拡張であり，つまり DG 森田理論では「圏上の加群の圏」などという多少高級なものを扱うことになる）．さらに，2 つの位相的閉弦理論の持つ構造の同型として議論されるミラー対称性が，これらの DG 圏からどのように得られることが期待されているか？ という今まさに大きな流れとして発展中の話題についての解説で締めくくられている．位相的弦理論の（数理）物理の研究において DG 圏，A_∞ 圏，導来圏，三角圏などが登場するようになってきたが，本書の内容はそれを一歩超えている．つまり物理学者にとっても新しい進展をもたらす恰好の数学である可能性を秘めている．著者の髙橋氏は我々の世代の研究者の中の一人のリーダー的存在であり，DG 圏，A_∞ 圏までしか興味を示していなかった腰の重い評者が導来圏，三角圏などを扱うようになったのも髙橋氏に吹き込まれたからに他ならない．この髙橋氏が「今向かうべき方向はこれなのだ！」といわんばかりに書いた篤い一冊（これも勝手な評者の想像），是非たくさんの人に味わってみてもらいたいと思う．

梶浦　宏成（千葉大学大学院理学研究科）

BOOK REVIEW

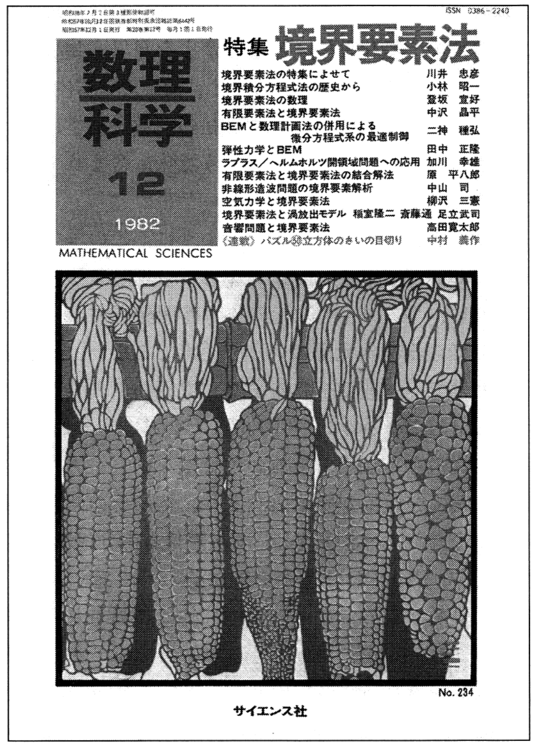
「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

登坂 宣好

1982年12月号

1982年12月号「境界要素法」は，科学技術分野におけるこれまでの「理論」,「実験」に加えて「計算」というアプローチの有効性が示されつつある潮流の中で，これまでの差分法，有限要素法に続く“新しい数値計算法”の特徴および適用例を紹介するタイムリーな特集であった．



現象の一つの数理モデルである偏微分方程式の近似解法として，差分法，変分法，積分方程式法等が用いられてきた．中でも変分法系統の「有限要素法」が任意解析対象領域形状への適用性に優れている特性を発揮するために目覚しい進展を遂げていた．有限要素法が画期的なことは，「要素」概念の導入による数値計算法の組織化である．一方，境界要素法は，これまでの積分方程式の近似解法とは異なり，境界積分方程式の“要素”を用いた組織的な数値解法であると位置づけられることから差分法や有限要素法とは異なる“境界型”解法であるという特徴を有することになる．この特徴が差分法や有限要素法との対比において多くの注目を浴びることとなった．

境界積分方程式を含む積分方程式の数値解法としてこの“要素”の概念を導入するならば，これまでの積分方程式の数値解法とは異なる組織化が計れることになる．そこで，私は，この特集で境界要素法を単に境界積分方程式のみならずより広く積分方程式の組織的な数値解法と位置づけ，あえて解法の適用性を広げることにより積分方程式の再評価を試みる記述をした．なお，その主張に基づく成果の一端を1984年8月号「境界要素法の新展開」と1985年5月号「ナビエ・ストークス方程式」に紹介させていただいた．

本特集から30年を経過した現在，境界要素法は線形問題に対する境界型解法としての有効性を発揮し，特に，大量の境界未知量に対して「高速多重極法」に代表される高速算法の導入と展開や無限領域を有する問題，境界データに基づく逆問題の解析等に進展している．さらに，非定常問題および非線形問題に対しても，そこに必然的に内在する領域内部の未知量の境界未知量への変換技法として「多重相反手法」が開発されている．しかし，線形問題に対しても近似解の精度等に関する数理的検証および非線形問題への適用性の検討等の残された諸問題は数多く存在している．

ちょうどこの特集が組まれた頃，境界要素法の進展を目的とした新しい研究会「境界要素法研究会」が組織され，現在では，「日本計算数理工学会」として活発な活動を続けている．境界要素法を含む境界型数値計算法のさらなる進展を期待したい．

（とさか・のぶよし，東京電機大学未来科学部）

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-84：for Senior & Graduate Courses）

演習形式で学ぶ
相転移・臨界現象

宮下精二・轟木義一　共著

本体 2476 円　送料 290 円　表示価格は税抜きです

現象，模型，手法の諸相を幅広く演習形式でとり上げて解説．できるだけ前提知識なしでもわかるように工夫が試みられ，この分野の基本的な考え方を身に付けるのに好適な一冊となっている．

第 1 章　熱力学における相転移
第 2 章　統計力学における相転移
第 3 章　臨界現象におけるスケーリングおよび繰り込み群の方法
第 4 章　いろいろな模型
第 5 章　フラストレーションのある模型
第 6 章　Kosterlitz–Thouless 転移
第 7 章　量子臨界現象
第 8 章　ランダム効果
第 9 章　可解模型
第10章　共形場理論
第11章　相転移の動的側面と非平衡相転移

サイエンス社

第9回 国家・学問・戦争の諸相

木村駿吉の経験（4）

無線電信機の開発とその後

岡本 拓司

第6回より，明治期の物理学者・技術者の木村駿吉の経験に即して，この時期に学問で身を立てることの実態を探ろうとしている．前回はイェール大学での留学生活と第二高等学校（二高）での教員としての経験を辿った．今回は，駿吉が日露戦争時の無線電信機の開発に果たした役割を考察したい．なお，以下には，旧拙稿[1)]を加筆修正して用いた箇所がある．

9.1 日本における無線電信研究の開始

マルコーニ（Guglielmo Marconi, 1874–1937）による電磁波の送受信の成功（1895年）は，明治30年（1897年）頃には，外国の雑誌を介して日本の研究者にも知られるようになっていた．駿吉も電波の研究に関心を抱き，明治31年（1898年）から翌年頃，ドイツのマックス・コール（Max Kohl）社製の教育用のマルコーニ無線電信機を買い入れ，演示実験を行った[2)]．コヒーラー，継電器，デコヒーラーからなる簡単な機器であったが，受信してからの作動原理は説明できたようである．駿吉は，研究のために私費も投じた[3)]というが，この努力が彼を学校の外へと導くこととなった．

当初無線電信に関心を抱いたのは，電気工学者と軍関係者であった．海軍大学校では，教授の酒井佐保（1861–1918）が学生にマルコーニの成功の意味について注意を喚起し[4)]，逓信省の電気試験所では，松代松之助（1866–1948）が研究を始めた．松代は，月島の海岸から電波を送信し，金杉沖の小船や，品川沖の第五台場で受信させた．12月25日には大学や商業学校の関係者，陸海軍首脳部，新聞記者等に実験を披露し[5)]，成果を明治31年の電気学会で発表したともいう．

英国からも，英国公使館附川島令次郎（1864–1947），海軍大機関士小田切延寿から海軍にあてて無線電信の研究を促す意見・報告が送られていた（明治32年5月17日付）．海軍はこれに刺激を受け，英国で建造中の軍艦敷島の予算の剰余でマルコーニ式無線電信機を購入し，敷島の艦員に技術を習得させるという計画を立てた．駐英公使の加藤高明（1860–1926）は実現に尽力したが，マルコーニ側は，使用料の他に100万円以上とも言われるロイヤルティーの支払いを求め，今後の技術の発達に際しても別途の支払いを要求してきたために，海軍は購入を断念したという．

米国駐在員の海軍大尉秋山真之（1868–1918）も，無線電信の重要性に鑑み，清国と韓国における無線電信施設設置権を日本が獲得しておくべきであるとの意見書を送っている（明治32年6月21日付）．駐清公使西徳二郎（1847–1912）は鉄道敷設

権を優先するよう提言したが，閣議では秋山の意見が支持を集め，交渉が始まった．ただし清国との交渉は翌年の北清事変により進展せず，韓国は自ら無線電信施設を設置すると応対したために，いずれも不調に終わった．

明治32年には，海軍軍令部の少佐外波内蔵吉（1863–1937）が無線電信の利用を思いつき，米国視察後の電気技術者の加藤木重教（1857–1940）に無線電信の事情を尋ねたが，加藤木は，無線電信は実用段階には達していないと述べるにとどまった．このように，初期の専門家の評価は必ずしも高くはなかったが，同年10月，軍務局長は外波に無線電信の調査を命じた．外波は松代の研究について情報を得たためか，まず逓信省で次官の小松謙次郎（1864–1932）に相談したところ，小松は外波を電気試験所所長の浅野応輔（1859–1940）にひきあわせた．浅野自身は，無線電信については懐疑的であったが，松代の海軍への割愛を認めた[6]．松代は，海外からの輸入を断念した経緯を説明した外波に，「日本でも立派なものが出来る筈である」と語ったという[7]．

外波は，海軍兵学校の二期後輩で，海軍大学校選科では同期の海軍少佐木村浩吉（1861–1940）から，浩吉の弟の駿吉が無線電信の実験を行っていることを聞いていた．そこで外波は駿吉にも海軍への協力を求めることとし，二高と交渉を始めた．二高は駿吉の割愛に難色を示したが，海軍省・文部省間の交渉の結果転出が認められ，明治33年（1900年）3月9日より，駿吉は無線電信調査委員会に海軍教授として加わることとなった[8]．駿吉は，同盟休校事件の影響か，この転職を，「薄暗い陰気な所から明るい晴ればれした所へ来たと云う気分であつた」[9]と評している．

無線電信調査委員会は明治33年2月9日に発足しており，3年以内に80海里の通信を確実にすることを目標にしていた．松代は駿吉の到着以前から同委員として研究を始めており，2月27日には，海軍大臣山本権兵衛（1852–1933）ら省部の関係者を招いて，海軍大学校で近距離の送受信試験を行った[10]．用いたのは松代が電気試験所から持ち込んだ機器であり，1町の距離をへだてて3尺ほどの空中線を2箇所に立て，片方から火花で送信し，他方では印字受信機に符号を書かせるというものであった[11]．2月末からは軍艦武蔵において対陸上の，3月1日からは軍艦浅間と龍田の間で対艦の通信試験が行われた[12]．

次いで，委員会は試験用の受信所を羽田の穴守稲荷付近に建設し，7キロメートル離れた築地の海軍大学校からインダクション・コイルで送信した電波を受信するなどの実験を行った．最初の1週間は受信ができず，駿吉は継電器や変圧器を調整したがやはり叶わない．そこで送信側で空中線（150尺の柱から下げたもの）を調整すると，偶然受信が可能になったという[13]．検討の結果，一同は，反対高周波電流の効果で，羽田で電波が干渉しあい，受信できなかったことに気づいた．駿吉は最先端の電磁気学を知っていたが，当時は高周波に関する専門書はないに等しい．参照できたのはヘルツ（Heinrich Rudolf Hertz, 1857–1894）やテスラ（Nikola Tesla, 1856–1943）の教科書のみであり，以後も開発は手探りで進んだ．

明治33年5月の海軍大演習の後の観艦式では，明治天皇に無線電信機を披露することとなり，御召艦浅間と供奉艦明石に無線装置を設置する必要が生じた．松代はこの機器の設計を1週間以内に済ませ，自身で横須賀海軍工廠に渡した．横須賀工廠では3機が製作され，浅間・明石と，新造軍艦の敷島に設置された[14]．供奉艦と御召艦の間では通信は完全であったが，敷島との通信は，同艦が四国あたりへ行くと不完全になり，最大通信距離は18海里半程度であった[15]．

松代がマルコーニの工夫を参考にしながら作った無線電信機が，初の国産機である．マルコーニについては，発明当初，空中線の特許を日本で得ようと試みたが受理されなかったという，真偽定かでない逸話が広く知られている．当時，本国での出願から60日以内でなければ日本での出願は受理されないという規則があったが，マルコーニの出願は英国での出願から62日目であったという[16]．日本の関係者には彼の機器は高すぎたが，

反面，その特許に縛られることもなかった．松代が開発したのは，印字受信機を用いる無線電信機であり，駿吉は音響受信機を研究したが（明治33年8月には音響式受信機も完成した），結果的には記録の残る印字受信機が採用された．

印字受信機には変圧器・コヒーラー・継電器という，微調整を要する機器が3つあったが，当時の日本でこれらを揃えることは困難であった．日露戦争中，艦船に装備した継電器は，明治36年（1903年）に外波がロンドンのシーメンスの工場で見つけた英国海軍のもので，英国海軍省の了解を得て購入された．開戦後も台北と澎湖島の間で無線電信が通じないという事態が生じたが，古い継電器を英国製の新しい継電器に取り替えると，すぐに通信が回復したという[17]．

送信は，空中線につないだ球と，地絡させた球の間に，インダクションコイルで数センチメートルの火花を出しておこなった．インダクションコイルも適当なものがなく，医科大学の青山胤通（1859–1917）がドイツからエックス線発生用に購入した50センチのものを無理に借りたが，エボナイトの被覆を損傷してしまい，ドイツから取り寄せた材料で修理するということもあった[18]．

明治34年（1901年）5月には，通信兵器の製造が開始し，艦船間40海里，陸上・艦船間70海里の通信を実現する機器が完成したという．そこで調査委員会は同年9月に調査終了報告を提出し，また10月18日には正式に兵器採用された（三四式無線電信機）．国産化と改良のために研究は引き続き行われ，外波と駿吉は視察のために欧米へ派遣された．この間，80海里の通信距離が実現されたとして，無線電信調査委員会は明治35年（1902年）に解散し，松波は電気試験所に戻った[19]．

9.2 日本独自の無線電信機の開発

駿吉によれば，海外視察に際して特に訓令等は受けなかったという．欧米諸国においても無線電信は開発中であり，訪問で得るところはなかったようである．テスラの実験室も訪問したが，無線電力輸送や無線電燈照明の研究に没頭しており，無線電信には無関心であった．外波と駿吉は，日本での特許出願の逸話を知っており，マルコーニ社を直接訪問することは避けたが，同社がイギリスで建設中の無線電信柱を板囲いの外から覗き，守衛に追い払われるという経験はしている[20]．英国海軍は，他に情報を漏らさないという条件の下で，マルコーニ社から無線電信機を購入していたと駿吉は推測している．ドイツのテレフンケン社でも研究は進んでいたが，結局，日露間で戦争が始まっても，無線電信に関しては大きな差をつけられる心配はないと信じて帰国した[21]．

明治35年1月，日英同盟が成立し，同年のエドワード7世の戴冠式に小松宮彰仁親王を派遣することとなったが，その遣英艦隊でも無線電信の試験が行われた．同艦隊は，地中海のマルタ島において，フィッシャー中将（John Arbuthnot Fisher, 1841–1920）を司令長官とする英国地中海艦隊と出会った．このとき，高砂分隊長心得海軍中尉山本英輔（1876–1962）は，英国側の旗艦の無線電信機の見学を許され，その結果を70ページの報告書として提出した[22]．コヒーラーに少量の水銀を入れてあること，シーメンス製の継電器を用いることなどが述べられており，駿吉が海外視察で得た見解とも一致している．

外波，木村の帰国後は，横須賀海軍兵器廠に場所を移し，定員も増やして，三四式無線電信機の改善と国産化実現に向けた研究が進められた．前述の山本も明治36年（1903年）4月より無線電信の改良研究に加わった．国産化に際しては国内の機器製作会社の協力も求められたが，多くは技術面での不安から協力に躊躇した．その中で，本郷の聖堂脇で学校用電気器具を扱っていた安中常次郎（1872–1913）は，兄弟や親戚から金を借りてインダクションコイルを試作し，海軍との交渉の後に注文に耐える機器の製作に漕ぎ着けた[23]．

明治36年に至っても，無線電信には不明点が多々あった．同年の晩夏，横須賀の吾妻山と大洗の間で通信試験を行った際，大洗で受信がなかなか成功しなかったため，最終日に山本が100メー

トルほどの地鈑線を1メートルに縮めて受信器につなぎ，これを波打ち際へもっていって受信を試みたところ，鮮明な電信符号を得られたということもあった．また，試験を重ねるうち，空中線は鉛直方向に垂らす必要はなく，斜めに張っても機能することなどが知られるようになった．

日露戦争直前の明治36年末，可能な限り国産品を利用した改良新式機が三六式無線電信機として完成し，海軍に採用された．翌年にかけては，開戦を目前にして艦船の無線電信の改装・新設が急がれた．横須賀の造兵部のみでは対応できなかったが，秘密兵器全体の外注はできず，一部のみ東京と大阪の電気工場に注文された．作業は年末年始も無視して続けられ，連合艦隊の出征を目前にした時期には，海軍は，横須賀から佐世保まで部品を運ぶ間，貨車に職工を載せて組立完成を行いたいと希望したが，鉄道当局が許可せず断念した．最終的には，横須賀の調査所員全員が佐世保に出張し，駆逐艦・仮装巡洋艦に至るまでの連合艦隊全艦船に三六式無線電信機を取り付けた[24]．

9.3 戦場の無線電信機

開戦後，外波と山本は出征したため，戦時中は駿吉が無線電信機の製造や設置を担当した．駿吉は造兵部員として北海道や千島列島，四国の室戸岬，鹿児島の佐多岬などを訪れた他，艦船に乗り組んで通信の監督も行った．

明治37年（1904年）7月下旬，ロシアのウラジオストク艦隊数隻が脱出し，神子元島付近で日本の商船を撃沈したために，東京湾は数日間封鎖状態に陥った．駿吉は夜間，横須賀の吾妻山哨所でウラジオストク艦隊の無線通信を傍受したが，ロシア語が理解できず，詳細は不明であった．このとき，雲によって月光が遮られると通信が始まり，月があるときには通信がなかったことから，駿吉はロシアの艦船が近傍にあると考えた．その後も傍受を続けたが，強く感受したのち突然通信を捉えることができなくなり，また突然それが復活するという事態があったため，駿吉はロシアの艦船が伊豆七島の島影に入ったのではないかと推察した．しかし，この見込みは外れており，実際にはロシアの艦船は金華山沖にあった．

当時の技術では，無線傍受によって相手方の位置の確定を行うことはできなかった．しかし，対馬海峡でウラジオストク艦隊を逃したために功をあせる上村艦隊などは，無線電信を用いて敵艦隊の位置に関する情報を得ようとし，また駿吉もそれに応えて傍受に基づく不確定な情報を提供したため，結果的に艦隊が駿吉の情報に振り回されるという事態も生じた．駿吉と，上村艦隊の参謀であった山本との間には，しばしば衝突も生じた．

使用実績の増加とともに，無線電信についての新たな知見が蓄積されていった．三六式無線電信機は80海里を確実通信距離として開発されたが，実際には100海里以上の通信も珍しくはなく，夜間には1000海里以上離れた戦地からの受信もあったという．山本は，気圧，温度，風向，地磁気と通信状況との関連についても情報を集めた．また，当初空中線はメーンマストから後ろに引っ張ってあったが，砲戦が始まると故障したため，駿吉は砲戦中も使用できる横架式を考案し，日本海海戦ではこれが採用された[25]．

日本海海戦における「敵艦見ユ」の第一報が，三六式無線電信機によって送受信されたことはよく知られている．連合艦隊の中で最初にバルチック（バルト）艦隊を発見したのは，商船を仮装巡洋艦に転用した信濃丸であり，明治38年（1905年）5月27日午前4時50分にロシア艦隊発見確認の無電を送った．これを，午前5時5分，対馬の尾崎湾にあった第三艦隊旗艦の厳島が鎮海湾の三笠に転電した．また以後，信濃丸に代わって，巡洋艦の和泉がロシア艦隊と目視できる距離を保ち続け，偵察の結果を三笠に直接報告した．軍艦に装備されていた発電機は，通常，80ボルトの直流発電機1台のみであったが，ここから電流を直接とって送信すると出力は急速に低下する．そのため60ボルト10アンペアの二次電池を用意し，これを発電機で充電したものを送信用の電源とした．和泉には，島津製作所が開発した，他よりも性能のよい

二次電池が搭載されており，強力な送信が可能であった．和泉は偵察行動を続けたが，午後1時30分，これを嫌ってロシア艦隊のナヒーモフが放った砲弾がフォールトップに命中して空中線が切断され，通信不能となった[26]．

連合艦隊の保有していた無線電信機の通信距離は，戦闘の行われた海域の大きさに十分見合っていたわけではない．しかし，各艦は，互いに他の艦がどこに向けて何を送信したかに配慮して，必要があれば転電し，妨害の惧れがあれば送信を控えた．連合艦隊は，効力に限度のある無線技術を，艦隊の連携によって活用した．この結果，海戦の全過程にわたって，三笠は海域に散らばる各艦から情報を受け取り続けることができた．

日露戦争中，陸での戦闘でも日本軍は敗れることはなかったが，ロシア側に決定的な打撃を与えることはできず，日本海海戦が戦争全体の帰趨を決することとなった．5月27日早朝から翌日にかけての海戦で，ロシア側のバルチック艦隊は，戦艦6隻を撃沈され，同2隻を捕獲されるなどの壊滅的な打撃を蒙り，自国の港湾に入港するか本国に帰港できたのは僅かに巡洋艦1隻，駆逐艦2隻，特務艦2隻であったと伝えられる．対するに日本側は，各艦の損害は激しかったものの，損失は水雷艇3隻のみであった．史上希な一方的敗北を喫したのち，6月7日，ロシア皇帝ニコライ2世はアメリカ大統領T. ローズヴェルトによる講和交渉の斡旋を受け入れ，戦争は終結へと向かった．

日本海海戦戦勝の報を工場で受けた駿吉は，思わずひざまづき合掌した．感激と安心は以後1年ほど続いたという．6月20日には東郷平八郎（1848–1934）から感状が与えられ，また児玉源太郎大将（1852–1906），乃木希典大将（1849–1912）なども造兵部の無線工場を訪問した[27]．連合艦隊作戦主任参謀の秋山真之は，6月10日付の駿吉宛の書状の中で，砲熕水雷のような「腕力的武器」も，無線電信が艦隊の進む方向を示さなければ効力は発揮できなかったと述べ，指令部員の武器は「無線電信機と鉛筆と二脚機」であったと感謝した[28]．日露戦争終結後，無線電信の貢献については以上のような理解が広まっていった．

9.4 ロシア側の無線電信

昭和に入ってからの懐旧談の中で，駿吉は，日本海海戦においてロシア側が無線通信を行わず，日本側の通信の妨害も行わなかった理由について，戦後ドイツ側から出たとされる話を紹介している．ロシア艦隊は，ドイツのテレフンケンから無線電信機を買い入れ，ドイツ人技師にこれを操作させていたが，軍紀の退廃にあきれた技師は，艦隊がマダガスカルに停泊している間に脱艦してしまった．ロシア艦隊の士卒は「鼠が逃げた」と侮蔑したが，この言葉が籤をなしたか（鼠は沈没前の船から逃げるという），艦隊は撃滅の憂き目にあってしまったというのである[29]．

駿吉自身，戦後，ロシアの艦船から押収した印字受信機を見て，自己送信の電流誘導に対する防御措置が施されておらず，実際には使用に耐えなかったのではないかと考えた．他に炭素音響受信機もあったが，旅順陥落に狼狽した艦隊には，無線電信機を活用する余裕はなかったのではないかとも想像している．

実際には，バルチック艦隊には優れた無線電信機が装備されていた．ロシアには，マルコーニよりやや後に独自に無線電信を開発したポポフ（Александр Степанович Попов, 1859–1906）がおり，彼がフランス人の技術者デュクレテ（Eugène Ducretet, 1844–1915）とともに設計したスラビ・アルコ式無線電信機がシーメンス社のロシア分工場で製造されていた．バルチック艦隊に装備されたのは主としてこのスラビ・アルコ式であったが，運送船キタイやコレアにはマルコーニ式の無線電信機が備えられていた．検波器にデコヒーラーを使うマルコーニ式の性能が安定しているのに対し，ポポフの開発した検波器を用いるスラビ・アルコ式は調整が必要であったが，司令長官のロジェストヴェンスキー（Зиновий Петрович Рожественский, 1848–1909）は両者の性能の相違をよく理解していたようである[30]．

ロジェストヴェンスキーは，細心の注意を払いながら無線電信の活用に努めていた．4月19日には，具体例を挙げて無線電信の状態が満足でないことを指摘し，この特殊技術の利用について努力を払うよう注意を与えた[31]．第三太平洋艦隊との合流の前にも，5月9日正午の段階で同艦隊のウラジーミル・モノマフと無線電信で応答ができるようになっており，所在点の確認や針路の指示を行っている[32]．日本海海戦直前の5月25日夜には，日本側の通信を傍受し，それがみな短時間かつ定常的なものであることから，日本側がまだ自艦隊を発見していないと推測した[33]．5月26日昼には，再び無線電信の傍受により日本側の艦船が近傍にあることを確認し，同日午後4時30分には，旗艦スワロフは，傍受を意図してか，各艦に対し，「戦闘の際には電信機に熟練なる電信技師を置く可し」という信号を掲げた．5時には，スワロフは，傍受の結果，ロシア艦隊の近傍にいる日本艦が7隻であることも確認している[34]．ロシア側はさらに，5月27日午前5時頃，信濃丸が自艦隊を発見したために，日本側の電信が北へ報告を逓送する形態へと変化したことも確認した[35]．

バルチック艦隊は，日本側の無線電信を妨害する能力も有していると考えていた．既述の通り，日本側の各艦も，僚艦の通信の妨害の惧れがある場合には発信を控えている．バルチック艦隊の巡洋艦ウラルには，700マイルの到達距離をもつ発信機が装備されていたが，日本艦が接近・追跡していることが確認された際（ロシア側の記録では5月26日から翌日にかけての夜），同艦は，海上信号器によって，日本側の通信に対する妨害の許可を請うた．敵側電信機を焼ききるまでは行かなくとも（ウラルはこれも不可能ではないと考えた），受信機に損傷を与えて通信を中断させ得るというのである．しかし，ロジェストヴェンスキー提督は許可しなかった[36]．発見されたことが定かでなかったか，あるいは，日本側の無線の傍受ができなくなるのを惧れたのであろうか．また，巡洋艦ウラルの艦長は，艦の武装解除を公然と口外しており[37]，提督は不信感を抱いていたとも思われる．ウラルを偵察に派遣するのを控えるほどであった．

ロシア側は，戦闘開始の1日以上前に，敵に知られないまま敵の位置を知ることができるという有利な条件の下にあり，敵の通信妨害の能力も備えていた．しかし，一部の艦でもウラジオストクにたどり着かせることを優先したロジェストヴェンスキーと彼の艦隊は，通信上の設備と技術における好条件を生かすことはできなかった．

日本側に発見されることを惧れたロジェストヴェンスキーは，5月16日には指揮下の艦隊に無線封鎖を命じていた[38]．自らの設定した目的に従って，ロジェストヴェンスキーは，優れた機器と技術の使用を，あえて封ずることを選択した．

対するに連合艦隊の東郷は，発見されることを惧れてはいなかった．東郷は，日本海海戦以前，敵側の無線を傍受した際，その意味が明らかでない場合には，出力の小さい日本側送信機では実効性は乏しいながらも，妨害電波を出すことを命じていた．日本海海戦を1月半後に控えた4月13日には，輻輳を避けるために不要不急の通信をしないよう命じたが，19日には，エジプトのポートサイドから外波が送ってきた情報によってロシア側の無線電信の送信出力が予想外に大きいことを知った駿吉の提案に従い，送信出力を大きくするよう告示を行っている[39]．

無線電信という最先端技術の使用の実態は，使用者が設定する目的や置かれた状況に大きく依存していた．連合艦隊は無線電信を活用し，バルチック艦隊はこれを有効利用する状況にはなかった．しかし，このことは，ロシア側の装備や技術が，日本側に劣っていたことを意味するわけではない．

ロシア側が通信手段を駆使していたとしても，総合的な戦力差は大きく，戦局に大きな変化はなかったであろう．しかし，ロシア側の無線技術の詳細が日本で理解されていた場合には，日本側の技術や技術者たちへの評価は変化していたかもしれない．駿吉自身，戦争の間は，バルチック艦隊の停泊地から得られた同艦隊の無線電信についての情報には注意を払っており，これを連合艦隊の装備の改良に用いるなどの措置をとった．ロシア

側の技術は侮りがたいと考えていたようにも思われる．しかし，戦後は，勝利したという結果ゆえか，ロシア側の技術を低く評価するようになった．日露戦争後，数年のうちには，ロシア側の状況を伝える書籍等も刊行されたが，駿吉は情報収集に努めたであろうか．勝利した戦争から学ぼうとする姿勢をとり続けるのは難しいのかもしれない．

9.5 日本海海戦後の内村

勝った戦争こそ害をなす——不敬事件において学校から放逐されるという憂き目を駿吉と共有した内村鑑三は，日露戦争後にはこう説くようになっていた．連戦連勝の報が届く日々，内村は，「既に非常に不真面目なりし民」が「更らに一層不真面目に」なっていくのを目撃していた．

新聞は真実を伝えず，敵愾心を煽る．真理を尊ぶ念も，人命を尊ぶ念も失われた．敵の死傷20万と聞いて喜ぶあまり，我が死傷5万の報に接しても人々はその意味を問わない．戦争は平和のために行われるというが，日清戦争は日露戦争を生み，日露戦争は次の戦争を生むであろう．戦争が終わるたびに軍備は拡張される．戦争は戦争のために戦われるのであり，平和のための戦争などかつて一回もあったことはない——内村は，戦勝が引き起こす事態を見聞し，以上のような理解に到達したことを，「日露戦争より余が受けし利益」と表現した[40]．

旅順陥落の際には思わず万歳を唱えた愛国者の内村も，日本海海戦のころにはただ平和を願うようになっていた．日本海海戦後の明治38年6月16日，水雷艇に乗り組んでいた太田十三男宛の書簡の中で，内村は以下のように述べている．

御健在を聞て悦ぶ．願くは日露一日も早く兵を息めて，君を余の家に迎ふるの快を得んことを祈り候．小生は今回程国のために泣きしことなく，平和の曙光に接して此二，三日来非常に愉快に存候．明日は横須賀に参り，フィンチ婦人に面会する積りに御座候．一日千秋の感を以て君並に他の諸勇士の凱旋を待つ，早々[41]

翌日，内村は横須賀に行き，太田も属していた軍人伝道義会の創設者フィンチ（Estella Finch, 星田光代，1869–1924）を訪ねた．ここでも飽くことなく，海戦から帰った軍人を相手に非戦論の講演を行い，一泊して東京に帰った．会場の外には官憲の目も光っていたようである[42]．

同時期，駿吉も横須賀にいたものと思われる．秋山からの感謝状が届く頃であり，数日すれば東郷の感状が到着する．かつての盟友が同じ軍港の町で非戦論に熱弁をふるっていたことを，喜びの只中の駿吉ははたして知っていたであろうか．

9.6 その後の駿吉

無線電信機の成功によって，駿吉は時の人となった．戦後，京都帝国大学教授となった水野敏之丞が作った受信機との対決もあったが，駿吉が勝利を収めた[43]．日露戦争の半年ほど後には，工学博士が授与されるとの噂もたった[44]．ただし実現はしなかった．

成功者に特有の話題も付きまとった．駿吉と外波が海外視察をしていたことから，ドイツでは駿吉が自身の発明を盗んだと主張する者が現れ，ドイツでも新聞記事となった[45]．日本人が独自に無線電信を開発できるはずがないとの思いこみがあったのであろう．駿吉は直接対決を辞さなかった．明治39年（1906年）にはベルリンで万国無線電信会議が開催されたが，駿吉はこれに出席し，2カ月にわたってベルリンに滞在したが，この間に先方が何も申し出ないことをもって解決済みであると看做した[46]．

無線電信に続いて，明治39年3月には，駿吉は無線電話の実現にも成功した．これに対しては，松代のあとに電気試験所から送り込まれた田子正次が，駿吉が自身の発明を盗んだとする談話を発表した[47]．新聞をやや賑わしたが，大事には至らなかったようである．

大正3年（1914年）には駿吉は海軍を辞した．海軍にいる間は，国産機を開発したという自負があったためか，安易に輸入技術に頼ることを厳し

く拒否していた．この駿吉が退くと，欧米からの技術の輸入も盛んになっていった[48]．退官後は，東京電気や日本無線と関わり，弁理士としても活躍したが，昭和 13 年（1938 年）に病死した．死に先立って，海軍の後輩の需めに応じて，当時すでに忘れられようとしていた無線電信開発の草創期に関する回想を発表しているが，これは現在でも基本的な資料として利用されることが多い．

4 回にわたって木村駿吉の生涯を辿った．自負心の強い学徒が，運命の変転を余儀なくされながらも，与えられた環境で，物怖じせずに自身の能力を発揮する姿は，「倜儻不羈」の語で評するのが適切であるように思われる．物理学者の戦時協力は，第一次大戦頃から目立ち始めるが，駿吉の無線電信の開発は，それより 10 年ほど早い．とらわれない駿吉の性格があってのことであろう．帝国大学卒ながら，準備された道を歩むのみではなかった彼の経験を検討することで，同時期の科学や教育に関する多様な理解が獲得できる．

無線電信は日露戦争下で科学研究が大きな成功を収めた例であった．これに対し，同じ科学研究の結果であっても，却って自軍の敗北をもたらすのではないかと危惧される困難を招いた事例もあった．次回は，戦前期の日本で結核とならぶ国民病であった脚気を取り上げ，医学者たちの動向を検討する．

今回も杉本恭一氏より貴重なご教示を賜った．

参考文献

1) 岡本拓司「百年前―木村駿吉とその周辺」，『科哲』，**7** 号（2005 年），36–47 ページ．
2) 木村駿吉「日本海軍初期無線電信思出談」（以下「思出談」と略），科学史研究，**9** 号（1945 年），75–97 ページ，77–78 ページ．
3) 谷恵吉郎「電波界列伝　木村駿吉」，電波時報，**14** 巻 11 号（1959 年 11 月），38–39 ページ．
4) 電波監理委員会『日本無線史　第十巻』（以下『無線史』と略）（電波監理委員会，1951 年），1–2 ページ．
5) 電気試験所『電気試験所五十年史』（以下『五十年史』と略）（電気試験所，1944 年），715 ページ．
6) 前掲[4]，『無線史』，4–6 ページ．
7) 前掲[5]，『五十年史』，716 ページ．
8) 前掲[4]『無線史』，5–7 ページ．
9) 前掲[2]，「思出談」，78 ページ．
10) 前掲[4]，『無線史』，7–8 ページ．
11) 前掲[2]，「思出談」，82 ページ．
12) 前掲[4]，『無線史』，10 ページ．
13) 前掲[2]，「思出談」，84–85 ページ．
14) 前掲[5]，『五十年史』，716 ページ．
15) 前掲[4]，『無線史』，11–12 ページ．
16) 前掲[2]，「思出談」，76 ページ．
17) 前掲[2]，「思出談」，82–83 ページ．
18) 前掲[2]，「思出談」，83–85 ページ．
19) 前掲[4]，『無線史』，14–15 ページ．
20) 前掲[2]，「思出談」，78–81 ページ．
21) 前掲[2]，「思出談」，86 ページ．
22) 前掲[4]，『無線史』，19–20 ページ．
23) 古幡政範「電波界列伝　安中常次郎」，電波時報，**15** 巻 11 号（1960 年 11 月），44–45 ページ．
24) 前掲[4]，『無線史』，20–21 ページ．
25) 前掲[4]，『無線史』，20–26 ページ．
26) 大江志乃夫『世界史としての日露戦争』（立風書房，2001 年），645–646 ページ．
27) 前掲[2]，「思出談」，91 ページ．
28) 前掲[4]，『無線史』，34–36 ページ．
29) 前掲[2]，「思出談」，90–91 ページ．
30) 田中正智「日本海海戦：その情報通信からの視点 3―波濤万里ロジェストウェンスキーの通信戦略―」，太平洋学会誌，**94** 号（28 巻 1 号）（2005 年 5 月），55–86 ページ．
31) 外山三郎『日露海戦史の研究　下――戦記的考察を中心として――』（教育出版センター，1985 年），270 ページ．
32) 外山，前掲[31]，『日露海戦史の研究　下』，274 ページ．
33) 著者名無記載，時事新報社訳『露艦隊幕僚戦記』（海軍勲功表彰会，1907 年），11–12 ページ．
34) 著者匿名，時事新報社訳『露艦隊最期実記』（海軍勲功表彰会，1907 年），27–28 ページ．
35) 前掲[33]，『露艦隊幕僚戦記』，17 ページ．
36) 前掲[34]，『露艦隊最期実記』，29–31 ページ．
37) ポリトウスキー著，時事新報社訳『露艦隊来航秘録』（海軍勲功表彰会，1907 年），224 ページ．
38) 田中，前掲[30]，「日本海海戦：その情報通信からの視点 3」．
39) 中田良平「日本海海戦：その情報通信からの視点 2―東郷とマカロフ　緒戦の情報通信合戦―」，太平洋学会誌，**94** 号（28 巻 1 号）（2005 年 5 月），35–51 ページ．
40) 内村鑑三「日露戦争より余が受けし利益」，『内村鑑三全集』13（岩波書店，1981 年），399–407 ページ．
41) 『内村鑑三全集』37（岩波書店，1983 年），56 ページ．
42) 鈴木範久『内村鑑三日録　1903–1907　平和の道』（教文館，1995 年），192–193 ページ．
43) 前掲[2]，「思出談」，95 ページ．
44) 『読売新聞』，1905 年 12 月 2 日朝刊，2 ページ．
45) 前掲[2]，「思出談」，94 ページ．
46) 『朝日新聞』東京版，1907 年 2 月 18 日朝刊，4 ページ．
47) 田子正次「無線電話発明の来歴」，『朝日新聞』東京版，1907 年 6 月 26 日朝刊，2 ページ．
48) 前掲[4]，『無線史』，44 ページ．

（おかもと・たくじ，東京大学大学院総合文化研究科）

大学院入試問題からみた

大学の数学

数学のより深い理解を目指す

第3回

線形代数2

行列の基本変形をめぐって

海 老 原　円・太 田　雅 人

3.1 行列の基本変形

今回は，行列の基本変形に関連する問題を取り扱う．

K は体とする．正確な定義は述べないが，しかるべき四則演算の運用ができる体系を**体**（field）という．ここでは $K=\mathbb{R}$ あるいは $K=\mathbb{C}$ と考えていただいて差し支えない．K の元を成分とする n 次元ベクトル全体の集合を K^n と表し，K の元を成分とする $m\times n$ 行列全体の集合を $M(m,n;K)$ と記す．行列の成分の横の並びを行（row）といい，縦のつらなりを列（column）とよぶ．必要に応じて，行列の第 i 行を R_i，第 j 列を C_j と表記することにする．

行列の**基本変形**には行に関する変形と列に関するものがある．それは次のようなものである．

(1)　2 つの行（列）を交換する：第 i 行と第 j 行の交換を「$R_i \leftrightarrow R_j$」，第 i 列と第 j 列の交換を「$C_i \leftrightarrow C_j$」という記号で表すことにする（$i\neq j$）．

(2)　ある行（列）に 0 でない定数をかける：第 i 行（列）を c 倍する操作を「$R_i\times c$」（「$C_i\times c$」）とここでは表す（$c\neq 0$）．

(3)　ある行（列）に別の行（列）の定数倍を加える：第 i 行（列）に第 j 行（列）の c 倍を加える変形を「R_i+cR_j」（「C_i+cC_j」）と略記しよう．

基本変形は，**基本行列**とよばれる行列を左または右からかけることによって得られる．基本行列を左からかければ行の変形が生じ，右から乗ずれば列の変形が起こる．

3.2 行列の階数と連立 1 次方程式

それでは最初の問題を見ることにしよう．

問題 3.1　(名古屋大学大学院情報科学研究科計算機数理科学専攻，平成 20 年度)
$B = \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 & -3 \\ 1 & -6 & t & 5 \\ 2 & -2 & 3 & s+2 \end{pmatrix}$ とおくとき，次の各問に答えよ．

(1)　$\mathrm{rank}(B) = 2$ となるような実数 s, t の組をすべて求めよ．

(2)　(1) の条件のもとで，x_1, x_2, x_3, x_4 を未知数とする連立 1 次方程式

$$B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

が解をもつような実数 s, t と，その場合のこの方程式の解を求めよ．

解答例　(1) 行列 B に基本変形をほどこす（どのような基本変形をほどこしたのかが分かるような補足説明を矢印に添えておく）．

$$\begin{pmatrix} 1 & -s & 0 & -3 \\ 1 & -6 & t & 5 \\ 2 & -2 & 3 & s+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 & -3 \\ 0 & s-6 & t & 8 \\ 0 & 2s-2 & 3 & s+8 \end{pmatrix}.$$

もし $s = 6$ ならば，右側の行列は $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & t & 8 \\ 0 & 10 & 3 & 14 \end{pmatrix}$ であるが，この行列から第 3 列を取り除いた 3 次の小行列の行列式が -80 となり，これが 0 でないことから，B の階数 $\mathrm{rank}(B)$ が 3 であることが分かる．よって $s \neq 6$ としてよい．

そこで，上で得られた行列に対して，さらに第 3 行から第 2 行の $2(s-1)/(s-6)$ 倍を引く変形をほどこすと

$$\begin{pmatrix} 1 & -s & 0 & -3 \\ 0 & s-6 & t & 8 \\ 0 & 0 & 3 - \dfrac{2(s-1)t}{s-6} & s+8-\dfrac{16(s-1)}{s-6} \end{pmatrix}$$

が得られる．ここで $s - 6 \neq 0$ に注意すれば，この行列の $(3,3)$ 成分および $(3,4)$ 成分がともに 0 であることが $\mathrm{rank}(B) = 2$ となるための必要十分条件を与えることが分かる．詳細は省略するが，高校数学程度の議論により，このような (s,t) は $(-2,4)$ および $(16,1)$ の 2 組であることが示される．

(2) 連立 1 次方程式の係数行列 B と定数項ベクトル $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ を並べて得られる拡大係数行列を $\tilde{B}$ と表すことにする．連立 1 次方程式が解をもつことと，$\mathrm{rank}(\tilde{B}) = \mathrm{rank}(B)$ であることとは同値である．

$(s,t) = (-2,4)$ のとき，$\tilde{B}$ に次のような行基本変形をほどこす．

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & -6 & 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\times(-1/8)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -6 & 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+6R_2]{R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

このことより $\mathrm{rank}(\tilde{B}) = 2 = \mathrm{rank}(B)$ が分かるので，連立 1 次方程式は解をもつ．また，この方程式は

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 - x_4 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

と同値であるので，一般解は

$$x_1 = 3 - \alpha + \beta, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \beta, \quad x_3 = \alpha, \quad x_4 = \beta$$

(α, β は任意定数）と表される．

一方，$(s,t) = (16,1)$ のとき

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & -16 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & -6 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 18 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -16 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 10 & 1 & 8 & -4 \\ 0 & 30 & 3 & 24 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-3R_2} \begin{pmatrix} 1 & -16 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 10 & 1 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

と変形される．この場合は $\mathrm{rank}(\tilde{B}) = 3 \neq \mathrm{rank}(B)$ であるので，方程式は解をもたない（最後にあらわれた行列の第 3 行は，もとの連立方程式を式変形して $0 = 9$ という不合理な式に到達したことを示している）． **解答終わり**

行列の階数と連立 1 次方程式に関する問題である．

くわしくは線形代数の教科書にあたって確認していただきたいが，行列 A が与えられたとき，その階数（ここでは $\mathrm{rank}(A)$ と記している）を知る方法がいくつかあるので，それを簡単にまとめておこう．

(1) 基本変形を繰り返して行列を簡単な形（標準形）に直し，その形から階数を知ることができる．

(2) A の線形独立な行ベクトル（列ベクトル）の最大個数が $\mathrm{rank}(A)$ である．

(3) A の 0 でない小行列式の最大次数が $\mathrm{rank}(A)$ である．

上記の (1) については，どのような基本変形を用い，いかなる「標準形」を目指すのか，教科書によって多少の異同があるが，通底するのは次のような考え方である．

(1)′ 行列の階数は基本変形によって不変である． したがって，行列 A に基本変形を繰り返し，その結果得られた行列の階数が，上述の方法 (2) あるいは (3) に照らして一目瞭然になったならば，そのとき A の階数を知ることができる．

次に，連立 1 次方程式について述べよう．n 個の未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を含む m 個の式を連立させた連立 1 次方程式は，一般に

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$$

と書くことできる．ここで $\boldsymbol{x}$ は x_1 から x_n を縦に並べたベクトルであり，A は係数を並べた $m \times n$ 行列（**係数行列**）であり，$\boldsymbol{c}$ は定数項を縦に並べた m 次元ベクトルである．A と $\boldsymbol{c}$ を並べた行列 $\tilde{A} = (A\,\boldsymbol{c})$ は**拡大係数行列**とよばれる．

消去法により連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ を解く作業は，拡大係数行列 $\tilde{A}$ に行基本変形を繰り返して行列を簡単にするという操作と対応する．解集合を不変に保ちつつ方程式を簡単にしてゆき，最終的な段階に至ったとき，方程式はすでにほとんど解けているといってよい状態になっている．そうしておいてから解を求める．これが消去法の要諦である．

係数行列や拡大係数行列の階数の持つ意味についても述べておこう．方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ が解を持つ（解集合が空集合でない）ための必要十分条件は，$\mathrm{rank}(\tilde{A}) = \mathrm{rank}(A)$ で与えられる．さらにこのとき，一般解は $n - \mathrm{rank}(A)$ 個の任意定数をもつ．ここで，$\mathrm{rank}(A)\,(= \mathrm{rank}(\tilde{A}))$ は**本質的な意味での式の本数**を意味すると考えられる．このような見方をすれば

（一般解の任意定数の個数）＝（未知数の個数）－（本質的な意味での式の本数）

が成り立つことになり，これは我々の直観を裏づける．

3.3 逆行列の計算

次は逆行列の計算を取り上げる．

> **問題 3.2**　（京都大学大学院情報学研究科修士課程複雑系科学専攻，平成 21 年度）
> 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

解答例　3×6 行列 $(A \,|\, E_3)$ に行変形を繰り返しほどこす．左側の行列が単位行列に到達したとき，右側には A の逆行列 A^{-1} があらわれる．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2-3R_3]{R_1+R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

これより $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることが分かる．　　　　**解答終わり**

これは**ガウス**の考案した方法とされる．n 次正則行列 A と単位行列 E_n を並べた $n \times 2n$ 行列 $(A \,|\, E_n)$ に対して行基本変形を繰り返しほどこし，左側の行列 A を単位行列に変形することができる．そのとき，右側にあらわれる行列を X とする：

$$(A \,|\, E_n) \longrightarrow (E_n \,|\, X).$$

行基本変形は左からある正則行列 P をかけることによって得られるので，この場合 $PA = E_n$, $PE_n = X$ が成り立つ．このことより $P = A^{-1}$, $X = P = A^{-1}$ が得られるので，A の逆行列が実際に計算できる．行列 A の具体的な形が与えられている場合には，この方法で逆行列を求めるのが便利であることが多い．

3.4 行列式

問題 3.3 （京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻，平成 20 年度：一部抜粋） n を 2 以上のある自然数とし，Vandermonde 行列 V_n を

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

により導入する．また，

$$\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) := \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j)$$

とおく．このとき

$$\det V_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

を示せ．

解答例　n に関する帰納法により証明する．$n = 2$ のときは $\det V_2 = x_2 - x_1 = -\Delta(x_1, x_2)$ であるので，上の式は成立している．そこで $n \geqq 3$ とし，$n-1$ 以下のものについては上の式が成立していると仮定する．ここで，V_n の第 n 列から第 $(n-1)$ 列の x_n 倍を引く．次に第 $(n-1)$ 列から第 $(n-2)$ 列の x_n 倍を引く．同様の操作を順次行い，第 2 列から第 1 列の x_n 倍を引くところまで続ける．このようにしても

その行列式は変わらないので

$$\det V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 - x_n & x_2 - x_n & \cdots & x_{n-1} - x_n & 0 \\ x_1(x_1 - x_n) & x_2(x_2 - x_n) & \cdots & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2}(x_1 - x_n) & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) & 0 \end{vmatrix}$$

が得られる．さらに第 n 列で展開すれば

$$\det V_n = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_2 - x_n & \cdots & x_{n-1} - x_n \\ x_1(x_1 - x_n) & x_2(x_2 - x_n) & \cdots & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2}(x_1 - x_n) & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \end{vmatrix}$$

が得られるが，行列式の多重線形性を利用して，第 i 列 $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ から $(x_i - x_n)$ をくくり出せば，右辺が

$$(-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

に等しいことが分かる．ここで帰納法の仮定を用いれば

$$\begin{aligned} \det V_n &= \left((-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n) \right) \left((-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{1 \leqq i < j \leqq n-1} (x_i - x_j) \right) \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

であることが示される．　　　　**解答終わり**

n 次正方行列 $A = (a_{ij}) \in M(n, n; K)$ の行列式 $\det A$ は

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} \right)$$

で与えられる．ここで S_n は n 次**対称群**すなわち n 文字の置換全体を表し，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は置換 σ の**符号**を表す．しかし，この定義式から直接行列式を計算するのは得策でないことが多く，実際の計算にあたっては，多くの場合，行列式の持つ次のような性質を利用する．

(1)　行列式は行や列に関して**多重線形性**および**交代性**を持つ．

(2)　したがって特に，2 つの行（列）を入れ替えれば行列式は (-1) 倍され，ある行（列）を c 倍すれば行列式は c 倍される．また，ある行（列）に別の行（列）の定数倍を加えても行列式は変わらない．

(3) 正方行列 A を対称に区分けして $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$（$A_{11}$, A_{22} は正方行列）としたとき，A_{21} または A_{12} が零行列であるならば $\det A = \det A_{11} \det A_{22}$ が成り立つ．

(4) 以上のことを利用して，行列式を**展開**することができる．

詳細はやはり線形代数の教科書にあたっていただきたいが，いずれにしても，**より次数の小さな行列式の計算に帰着させることによって帰納的に計算を実行する**というのが，行列式を求める際の常道である．

行列式については，さらに次のような性質もある．

(5) 行列を転置しても，その行列式は変わらない．

(6) $A, B \in M(n,n;K)$ に対して，$\det(AB) = \det A \det B$ が成り立つ．

問題 3.3 では**ヴァンデルモンドの行列式**とよばれるものを扱っている．この種の行列式はいろいろと存在するが，その中には，計算に職人技のようなテクニックを要するために試験の題材としては不適切なものも多い．ただし，**ヴァンデルモンドの行列式は常識として知っておいてほしい**と考える出題者は多いようである．

3.5 階数の本質

最後はふたたび行列の階数に関する問題である．

問題 3.4 （北海道大学大学院情報科学研究科コンピュータサイエンス専攻，平成 21 年度） 行列の階数に関する以下の問いに答えよ．

(a) i 行 j 列行列 A と j 行 k 列行列 B について $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - j \leqq \operatorname{rank} AB$ を示せ．

(b) j 次の正方行列 A, B, C において，$ABC = O$（O は零行列）のとき，

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} C \leqq 2j$$

を示せ．

解答例 (a) 実行列を考えるのか，それとも複素行列を取り扱うのかが分からないが，どちらの場合でも解答に変わりはない．ここでは K を体とし，$A \in M(i,j;K)$, $B \in M(j,k;K)$ であるものとして解く．いま，写像 $T_A : K^j \to K^i$ および $T_B : K^k \to K^j$ を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, $T_B(\boldsymbol{y}) = B\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{x} \in K^j$, $\boldsymbol{y} \in K^k$) により定める．このとき

$$\operatorname{rank} AB = \dim \operatorname{Im}(T_A \circ T_B) = \dim \operatorname{Im}\bigl(T_A|_{\operatorname{Im}(T_B)} : \operatorname{Im}(T_B) \to K^i\bigr)$$

であるが，次元定理より，これは $\dim \operatorname{Im}(T_B) - \dim \operatorname{Ker}(T_A|_{\operatorname{Im}(T_B)})$ と等しい．さらに $\operatorname{Ker}(T_A|_{\operatorname{Im}(T_B)}) \subset \operatorname{Ker}(T_A)$ に注意し，T_A に対して次元定理を用いれば

$$\operatorname{rank} AB \geqq \dim \operatorname{Im}(T_B) - \dim \operatorname{Ker}(T_A)$$

$$= \dim \mathrm{Im}(T_B) - \bigl(\dim K^j - \dim \mathrm{Im}(T_A)\bigr)$$
$$= \operatorname{rank} B - (j - \operatorname{rank} A)$$

となり，求める不等式が得られる．

(b) $A, B, C \in M(j, j; K)$ が $ABC = O$ を満たすとき，(a) の結果を用いれば

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{rank} ABC \\ &\geqq \operatorname{rank} AB + \operatorname{rank} C - j \\ &\geqq (\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - j) + \operatorname{rank} C - j \end{aligned}$$

が得られ，これから求める不等式がしたがう．　　**解答終わり**

一般に，行列 $A \in M(i, j; K)$ に対して，線形写像 $T_A : K^j \to K^i$ $(T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x})$ を考えるとき，$\operatorname{rank}(A) = \dim \mathrm{Im}(T_A)$ が成り立つ．**行列 A の階数は，線形写像 T_A の像の次元にほかならない**．これは**階数の本質**に関わる基本的な命題である．この事実を用いることにより，問題 3.4 は見通しよく解ける．

ここではさらに，**次元定理**あるいは**次元公式**とよばれる次の定理が重要な役割を果たしている．

定理 3.1（次元定理）　V, V' は K 上の有限次元線形空間とし，$T : V \to V'$ は K 上の線形写像とする．このとき

$$\dim \mathrm{Im}(T) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(T)$$

が成り立つ．ここで，$\mathrm{Im}(T), \mathrm{Ker}(T)$ はそれぞれ T の像および核を表す：

$$\mathrm{Im}(T) = \{\, \boldsymbol{y} \in V' \mid \text{ある } \boldsymbol{x} \in V \text{ に対して } \boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}) \,\},$$
$$\mathrm{Ker}(T) = \{\, \boldsymbol{x} \in V \mid T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \,\}.$$

なお，解答例の中で $T_A|_{\mathrm{Im}(T_B)} : \mathrm{Im}(T_B) \to K^i$ とあるのは，写像 T_A を $\mathrm{Im}(T_B)$ に**制限**した写像のことである．

3.6 おわりに

今回は，行列の基本変形に関連する問題を取り扱った．うち3問は計算問題である．最後の問題については，ここで示した解答例以外にも解法があるが，どのような解法を選ぶとしても，階数という概念をよく理解していることが求められる．

次回はふたたび微積分に関する問題を取り扱う．

（えびはら・まどか，埼玉大学大学院理工学研究科）
（おおた・まさひと，東京理科大学理学部）

特　集（2013 年 1 月号予告）

表現論の世界

多彩な数理が交叉する世界に迫る

本体 952 円

巻頭言	大島　利雄
軌道分解と表現論	松木　敏彦
フーリエ解析と表現論	河添　　健
対称空間と表現論	示野　信一
不変式と表現論	落合　啓之
関数等式と表現論	小木曽岳義
量子化された τ 函数の正則性	黒木　　玄
物理を通して学ぶ表現論	橋本　義武
［コラム］	寺田　　至
《名著に親しむ》	蟹江　幸博

特　集（2012 年 11 月号）

物理と数学における 厳密解

自然現象の解明に向けて

本体 952 円

徒然なるまま厳密解	国場　敦夫
振動現象と厳密解	高橋　大輔
シュレディンガー方程式と厳密解 **解ける仕組みと新しい直交多項式の発見**	小竹　　悟
Dirac 方程式と厳密解	菊川　芳夫
アインシュタイン方程式と厳密解	前田　恵一
イジング模型と厳密解	伊達　悦朗
流体力学の厳密解	岡本　　久
弦の場の理論における厳密解	大川　祐司
数理生態学における厳密解	上山　大信
［コラム］厳密解と計算機	十河　　清
《数学的な感覚の探求》　第 7 回	黒川　信重
《連載》　科学と社会　その 8	岡本　拓司
情報幾何の新展開　その 18	甘利　俊一

編集後記

今回の特集記事を読んでみると，振動は物理学では大変重要な概念であることがわかります．

私自身の体験では，最近腕の治療の際に超音波の装置を使っているのですが，この治療器の仕組みも振動を利用しているようです．仕組みとしては，人の非可聴領域の超音波を患部に当てて内部の組織を振動させ，そこで発生する温熱効果で治療を行う，ということのようです．

皆さんの周りでは振動がどのような役割を果たしているでしょうか．探してみると面白いと思います．　(R)

＊　　＊

今回は物理学における様々な振動現象について解説していただきました．波などに現れる周期性についての話は今回取り上げた話題だけでなく，地球の気候や経済学においても登場し，その後の動向を予測したりする上で重要な役割を担っているかと思います．

私は人の調子も波のような周期性があるのではないかと考えています．いつか自分の調子を解析してみたいと思っているのですが，私の調子は上向きかと思うと急に下降したりして，残念ながら解析はそう簡単にはいかなそうです．　(T)

数　理　科　学　12月号

2012 年 12 月 1 日発行

数　理　科　学　編　集　部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社　**サ　イ　エ　ン　ス　社**　　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁